

АЛГЕБРА

Учебное пособие для 7 класса
учреждений общего среднего образования
с русским языком обучения

Под редакцией профессора
Л. Б. Шнепермана

*Допущено
Министерством образования
Республики Беларусь*

4-е издание, исправленное

МИНСК «НАРОДНАЯ АСВЕТА» 2014

Правообладатель Народная асвета

УДК 512(075.3=161.1)
ББК 22.14я721
А45

Авторы:

Е. П. Кузнецова, Г. Л. Муравьева, Л. Б. Шнеперман, Б. Ю. Ящин

Рецензент

кандидат физико-математических наук, доцент, декан факультета
предпринимательства и управления учреждения образования
«Белорусский государственный аграрный технический университет»
И. М. Морозова

Алгебра: учеб. пособие для 7-го кл. учреждений
А45 общ. сред. образования с рус. яз. обучения / Е. П. Куз-
нецова [и др.] ; под ред. проф. Л. Б. Шнепермана. —
4-е изд., испр. — Минск : Нар. света, 2014. — 318 с. : ил.
ISBN 978-985-03-2166-4.

УДК 512(075.3=161.1)
ББК 22.14я721

ISBN 978-985-03-2166-4

© Оформление. УП «Народная асвета»,
2014

Правообладатель Народная асвета

От авторов

Дорогие ребята! Знакомство с математикой началось для вас с арифметики — науки о числе. Вы узнали, что такое натуральные, целые, рациональные числа, научились выполнять различные действия над этими числами (сложение, вычитание, умножение, деление, возведение в степень). Вы научились решать арифметические задачи, а также познакомились с некоторыми геометрическими фигурами и их свойствами.

В 7-м классе вы начинаете изучать *алгебру*. Вы научитесь преобразовывать различные выражения, доказывать тождества, решать уравнения и задачи, строить графики.

Упражнения в учебном пособии нумеруются по главам. Число перед точкой обозначает номер главы, число после точки — номер упражнения. Например, 5.16 — это 16-е упражнение из 5-й главы. Аналогично нумеруются и пункты теории. Пункт 2.4 означает 4-й пункт из 2-й главы.

Упражнения, которые должны уметь решать все, отмечены кружочком (например, 1.31°). Остальные задания предназначены для желающих углубить свои знания; номера наиболее сложных из них отмечены звездочкой (например, 3.65*).

Места в тексте, на которые надо обратить особое внимание, выделены разными шрифтами или отмечены на полях восклицательным знаком .

Материал, помещенный между треугольниками ($\blacktriangle$), адресован тем, кто интересуется математикой и собирается серьезно изучать ее в дальнейшем.

Весы  нарисованы там, где есть возможность сравнить варианты решения или доказательства.

Пояснения к преобразованиям заключаются между двумя вертикальными стрелками ($\downarrow \dots \downarrow$ или $\uparrow \dots \uparrow$), направление стрелок показывает, какое именно преобразование поясняется; эти пояснения не нужно записывать при оформлении решения в тетради.

Квадрат с диагоналями ($\boxtimes$) обозначает конец доказательства, исторические сведения выделены знаком . Материал для повторения отмечен знаком . Вопросительным знаком  отмечены вопросы по теории после каждого пункта.

Глава 1

ТОЖДЕСТВА

1.1. Числовые выражения



Напомним, что *рациональными числами* называются положительные обыкновенные дроби, отрицательные обыкновенные дроби и нуль. Каждое рациональное число можно представить в виде несократимой дроби $\frac{m}{n}$, где m — целое число, а n — натуральное число. Например:

$$1,2 = \frac{12}{10} = \frac{6}{5}; \quad 7 = \frac{7}{1}; \quad -32 = \frac{-32}{1}; \quad 0 = \frac{0}{1}; \quad -3\frac{4}{7} = \frac{-25}{7}.$$

В шестом классе мы изучали различные действия над рациональными числами: сложение, вычитание, умножение, деление и возведение в степень с целым показателем. Эти действия называются *арифметическими*. Сложение и умножение возможны для любых чисел, а деление и возведение в степень — нет.



Название части математики, изучающей свойства чисел, — арифметика — происходит от греческого слова *arithmos*, что означает «число».

Запись, составленная из чисел, знаков арифметических действий и скобок, указывающих на порядок выполнения этих действий, называется *числовым выражением*.

Одно число тоже является **числовым выражением**.

В следующих классах мы познакомимся и с другими числовыми выражениями.



Значением числового выражения называют число, которое получается при выполнении всех указанных в этом выражении действий, если их можно выполнить (рис. 1).

Пример 1. Найти значение числового выражения:

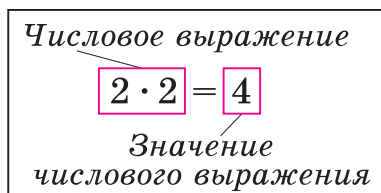


Рис. 1

а) $\frac{2 - 3,5}{4 + 2^2} - 3^2 + 9;$

б) $\frac{6 - 3 \cdot 5}{20 : 5 - 2^2};$

в) $(20 : 5 - 2^2)^0.$

Решение. а) В этом выражении можно выполнить все действия:

$$\frac{2 - 3,5}{4 + 2^2} - 3^2 + 9 = \frac{-1,5}{8} - 9 + 9 = \frac{-3}{16} = -\frac{3}{16}.$$

Полученное число $-\frac{3}{16}$ и является значением данного выражения.

б) В этом выражении встречается деление на нуль, так как $20 : 5 - 2^2 = 0$. А на нуль делить нельзя, поэтому нельзя и определить значение этого выражения; говорят, что *оно не имеет смысла*.

в) Выражение $(20 : 5 - 2^2)^0$ не имеет смысла, поскольку нельзя возводить нуль в нулевую (как и в отрицательную) степень.

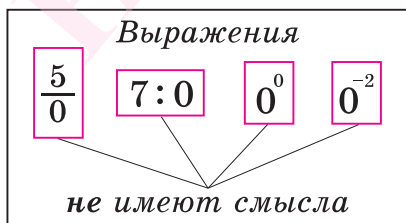


Рис. 2

Ответ: а) $-\frac{3}{16};$

б), в) не имеет смысла.

Если при нахождении значения числового выражения встречается деление на нуль, возведение нуля в нулевую или

отрицательную степень, то говорят, что это *выражение не имеет смысла* (рис. 2).

А

Для обозначения нуля греческие астрономы ввели особый знак Θ — омикрон. Этот символ является начальной буквой слова «онден» (ничего).

В Индии нуль называли «сунья» (пустое), арабы перевели это слово как «ас-сифр», поэтому до XVII в. нуль называли «цифрой».

Слово «нуль» происходит от латинского слова *nulla*, означающего «никакая».

Для обозначения числовых выражений можно использовать прописные буквы латинского алфавита *A, B, C, D, ...*.

Пример 2. Найти значение числового выражения

$$\frac{3\frac{11}{15} \cdot 3\frac{3}{14} - 4\frac{1}{3} : 2\frac{4}{11}}{8\frac{2}{3} + 1,5} + \left(63,9 : (-3)^2 + \left(\frac{2}{7}\right)^{-1}\right) : (-0,2).$$

Решение. Обозначим первое слагаемое буквой *A*, а второе — буквой *B*.

$$A = \frac{3\frac{11}{15} \cdot 3\frac{3}{14} - 4\frac{1}{3} : 2\frac{4}{11}}{8\frac{2}{3} + 1,5} = \frac{\frac{56 \cdot 45}{15 \cdot 14} - \frac{13 \cdot 11}{3 \cdot 26}}{8\frac{4}{6} + 1\frac{3}{6}} = \frac{12 - \frac{11}{6}}{10\frac{1}{6}} = 1;$$

$$B = \left(63,9 : 9 + \frac{7}{2}\right) : \left(-\frac{1}{5}\right) = (7,1 + 3,5)(-5) =$$

$$= 10,6(-5) = -53;$$

$$A + B = 1 - 53 = -52.$$

Ответ: -52 .



1. Какие числа называются рациональными? В каком виде можно представить каждое рациональное число?
2. Какое выражение называется числовым? Приведите пример такого выражения.
3. Может ли числовое выражение состоять из одного числа?
4. Что такое значение числового выражения?
5. Когда числовое выражение не имеет смысла? Приведите пример такого выражения.

Упражнения



Найдите значение указанного числового выражения (1.1—1.3).

- 1.1°. 1) $3,5 + 2,75$; 2) $-11,55 + 12,05$;
 3) $-2\frac{3}{4} + (-7\frac{5}{6})$; 4) $-5\frac{5}{9} + (-6\frac{7}{12})$;
 5) $8,75 + (-2,35)$; 6) $17,23 - (-2,77)$;
 7) $8,25 - (-3,15)$; 8) $12,43 + (-1,3)$;
 9) $-6\frac{1}{3} - (-2\frac{1}{8})$; 10) $-1\frac{6}{7} - (-4\frac{3}{14})$.
- 1.2. 1) $7,15 \cdot 2,4$; 2) $12,5(-4)$;
 3) $-\frac{7}{15}(-\frac{5}{14})$; 4) $-\frac{9}{20}(-\frac{5}{18})$;
 5) $(-3\frac{1}{3})(-9\frac{3}{10})$; 6) $-11\frac{1}{3}(-4\frac{13}{17})$;
 7) $\frac{7}{8} : (-2\frac{4}{5})$; 8) $-3\frac{3}{5} : 0,72$;
 9) $-1\frac{3}{4} : (-2\frac{1}{3})$; 10) $20\frac{2}{7} : (-10\frac{1}{7})$.
- 1.3. 1) $(-\frac{2}{5})^2(-\frac{2}{5})^3 : (-\frac{2}{5})^4$; 2) $(-\frac{3}{7})^4 : (-\frac{3}{7})^2(-\frac{3}{7})^{-3}$;
 3) $0,2^{-5} \cdot 0,2^7 : 0,2^0$; 4) $0,3^{-5} : 0,3^0 \cdot 0,3^4$;
 5) $1,4^{-3}(1\frac{2}{5})^{-2} : (\frac{7}{5})^{-6}$; 6) $2,6^{-7} : (\frac{13}{5})^{-4}(2\frac{3}{5})^2$.

1.4°. Найдите значение числового выражения, если оно имеет смысл:

1) $A = (2,31 + 13,64) : (5 - 2,25);$

2) $B = (3,17 + 16,78) : (20,3 - 7);$

3) $C = (12,8 + 3,2)^0 : (9 - 2 \cdot 4,5);$

4) $D = (17,3 + 2,7)(3 - 2 \cdot 1,5)^0;$

5) $E = \left(8\frac{4}{7} - 2\frac{1}{7} - 6\frac{3}{7}\right)^{-2} : (2,53 - 4,03);$

6) $F = \left(6\frac{3}{5} - 3\frac{1}{5} - 3\frac{2}{5}\right)^{-3} : (5,17 + 4,33).$

1.5°. Имеет ли смысл выражение:

1) $3,5 - \frac{2^3 - 4}{5 - (3,783 + 1,217)};$

2) $4,73 + \frac{2 \cdot 5^2 - 7^0}{6 + (4,7 - 8,7)};$

3) $16(7,341 + 3 - 10,341)^{-1};$

4) $15 : (1,89 + 4 - 5,89);$

5) $4^4 : (7,2 + 3^2 - 16,2)^0;$

6) $3^3(9,84 - 2^3 - 1,84)^{-2}?$

1.6°. Найдите значение числового выражения:

1) $A = (-1,26 : 0,03 + 3,2) : (-0,02)(-0,02)^0;$

2) $B = (4,08 : (-0,4) + 0,2) : (-0,2)(3,7 - 3,1)^0;$

3) $C = (-4,8 : 0,02 - 3,6) : (-0,06)(3^2 - 2^3);$

4) $D = -0,35(12,64 : 4 - 3,2)(7^2 - 3 \cdot 4^2).$

1.7°. Решите задачу, составив числовое выражение.

1) Площадь прямоугольника равна 27 м^2 , а одна из его сторон — 9 м . Чему равен периметр прямоугольника?

2) Периметр прямоугольника равен 36 м , а одна из его сторон — 6 м . Чему равна площадь прямоугольника?



1.8. Найдите значение выражения:

- 1) $(|5| + |-5|)^3$; 2) $(|-3| + |4|)^2$;
3) $(|-0,37| + |0,63|)^{-7}$; 4) $(|-2,85| + |0,05|)^{-1}$;
5) $(|3\frac{2}{5}| - |-1\frac{1}{5}|)^2$; 6) $(|-4\frac{3}{7}| - |2\frac{2}{7}|)^0$.



1.9. Вычислите:

- 1) 10 % от 12,63; 2) 1 % от 0,32;
3) 50 % от 63 м; 4) 33 % от 3000 км;
5) 25 % от 360 кг; 6) 75 % от 600 т;
7) $\frac{17}{25}$ % от 500 м; 8) $\frac{5}{7}$ % от 140 ц;
9) $2\frac{2}{9}$ % от 270 кг; 10) $3\frac{29}{75}$ % от 750 см.

1.2. Выражения с переменной



Запись, составленная из чисел, букв, знаков арифметических действий и скобок, указывающих на порядок выполнения этих действий, называется **буквенным выражением**.

Одна буква также является буквенным выражением.

В следующих классах мы познакомимся и с другими буквенными выражениями.

При записи буквенных выражений чаще всего мы будем пользоваться строчными буквами латинского алфавита $a, b, c, \dots, x, y, z$, а сами эти выражения будем обозначать прописными буквами латинского алфавита $A, B, C, \dots$.

Пример 1. Автомат изготавливает каждую минуту 2 детали. Он должен изготовить 340 деталей. Сколь-

ко времени проработал автомат, если ему осталось изготовить k деталей?

Решение. Автомат должен изготовить 340 деталей, ему осталось изготовить еще k деталей, значит, он уже изготовил $(340 - k)$ деталей. На это у него должно было уйти $\frac{340 - k}{2}$ мин, так как каждую минуту он изготавливает 2 детали.

Ответ: $\frac{340 - k}{2}$ мин.

Теперь, если нужно будет узнать, сколько времени проработал автомат, когда ему осталось изготовить 123 детали, мы просто подставим в выражение $\frac{340 - k}{2}$ вместо буквы k число 123, т. е. найдем значение этого выражения при $k = 123$:

$$\frac{340 - 123}{2} = \frac{217}{2} = 108,5 \text{ (мин)}.$$

В буквенном выражении $\frac{340 - k}{2}$ буква k , вместо которой можно подставлять различные числа, называется *переменной*, а само выражение — *выражением с переменной*.

Таким образом, *переменная* — это буква, входящая в буквенное выражение, которая может принимать различные значения (рис. 3).

Если в выражении с переменными вместо переменных подставить числа, то получится числовое выражение. Его значение называется *значением вы-*

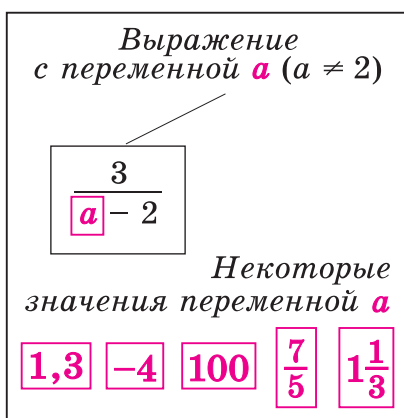


Рис. 3

Числовое выражение

$$\frac{3}{1\frac{1}{3}} - 2 = -4,5$$

Значение переменной

Значение выражения при $a = 1\frac{1}{3}$

Рис. 4

Множество значений, которые может принимать по смыслу задачи переменная k в выражении $\frac{340 - k}{2}$, называется **областью определения** этого выражения.

Таким образом, в примере 1 область определения выражения состоит из всех целых чисел от 0 до 340.

В область определения любого выражения могут входить только те значения переменных, при которых получается числовое выражение, имеющее смысл.

Пример 2. Найти значение выражения

$$A = \frac{4(a - 2b)}{3a + b}$$

при $a = 2$, $b = -3$.

Решение. При $a = 2$ и $b = -3$ имеем:

$$A = \frac{4(2 - 2(-3))}{3 \cdot 2 + (-3)} = \frac{4(2 + 6)}{6 - 3} = \frac{32}{3} = 10\frac{2}{3}.$$

Ответ: $10\frac{2}{3}$.



Вычисление значения выражения A при $a = 2$, $b = -3$ может быть оформлено и так:

ражения при данном значении переменных (рис. 4).

Какие же значения можно подставлять вместо буквы k в выражение $\frac{340 - k}{2}$? Из условия задачи ясно, что k может быть неотрицательным целым числом и не должно быть больше 340.

$$A \Big|_{\substack{a=2 \\ b=-3}} = \frac{4(a-2b)}{3a+b} \Big|_{\substack{a=2 \\ b=-3}} = \frac{4(2-2(-3))}{3 \cdot 2 + (-3)} =$$

$$= \frac{4(2+6)}{6-3} = \frac{32}{3} = 10\frac{2}{3}.$$

Мы часто будем рассматривать выражения с **областью определения, состоящей из всех значений переменной, при которых это выражение имеет смысл**. Такая область определения называется *естественной* (рис. 5; ее еще называют *областью допустимых значений переменной*). Когда область определения выражения естественная, то обычно в условиях задач и упражнений она не указывается.

Выражение	Значения <i>a</i> из естественной области определения
$3a - 4$	любые
$\frac{3}{a-2}$	$a \neq 2$
$(a+7)^{-3}$	$a \neq -7$

Рис. 5

Пример 3. Дано $A = \frac{3+8b}{4b-8}$ — выражение с переменной. Могут ли в область определения выражения A входить числа -13 ; -2 ; 0 ; 2 ; 4 ?

Решение. *Способ 1.* Подставляя поочередно данные числа в выражение A , убеждаемся, что при $b=2$ выражение A не имеет смысла, а при остальных значениях b — имеет смысл (убедитесь в этом). Следовательно, число 2 не может входить в область определения выражения A , а остальные — могут.



Способ 2. Выясним, при каких значениях b знаменатель $4b - 8$ равен нулю:

$$4b - 8 = 0, \text{ откуда } b = 2.$$

Значит, при $b = 2$ выражение A не имеет смысла. При всех значениях $b \neq 2$ выражение имеет смысл, следовательно, эти значения могут входить в область определения выражения A . Итак, числа -13 ; -2 ; 0 ; 4 могут входить в область определения выражения A , а число 2 — не может.

Пример 4. Указать естественную область определения выражения:

а) $A = x - 7$; б) $B = \frac{1 + 5x}{x - 7}$.

Решение. а) Естественная область определения выражения A — это множество всех чисел. Говорят также: *выражение A определено для любого значения x .*

б) Естественная область определения выражения B — это множество всех чисел, кроме 7 , т. е. $x \neq 7$. Говорят также: *выражение B определено для любого значения $x \neq 7$.*



1. Какое выражение называют буквенным? Приведите пример такого выражения.
2. Может ли буквенное выражение состоять из одной буквы?
3. Что такое переменная?
4. Что такое значение выражения с переменной?
5. Что такое область определения выражения с одной переменной?
6. Какие значения переменной не могут входить в область определения выражения с переменной?
7. Что такое естественная область определения выражения с переменной (область допустимых значений переменной)?

Упражнения

Запишите в виде буквенного выражения (1.10—1.11).

- 1.10°. 1) Сумму чисел a и 2;
2) разность чисел b и a ;
3) произведение чисел m и n ;
4) частное от деления числа m на число p ;
5) сумму чисел a , b и c ;
6) произведение чисел a , b и c ;
7) произведение числа a и суммы чисел b и c ;
8) частное от деления числа b на сумму чисел a и c ;
9) разность между частным от деления 7 на a и числом b ;
10) частное от деления числа a на разность чисел b и c .

- 1.11°. 1) Число, большее числа a на b ;
2) число, меньшее числа a на b ;
3) частное от деления суммы чисел d и c на k ;
4) произведение разности чисел m и k и числа p ;
5) частное от деления числа p на произведение чисел a , b и c ;
6) частное от деления произведения чисел m и n на число a ;
7) полусумму чисел m и n ;
8) полуразность чисел m и n ;
9) половину произведения чисел k и p ;
10) удвоенную разность чисел k и p .

- 1.12°. Прочитайте выражение, используя слова «сумма», «разность», «произведение», «частное»:

- | | |
|----------------------|----------------------|
| 1) $m + n + k$; | 2) mnk ; |
| 3) $\frac{l+m}{3}$; | 4) $\frac{b-k}{2}$; |

- 5) $(a + 2)m$; 6) $k(b - 7)$;
7) $4b - 5c$; 8) $2c + b$;
9) $m + kp$; 10) $17b - pt$.

1.13. Составьте три различных выражения A , B и C , используя:

- 1) числа, буквы q , t , z , знаки арифметических действий и скобки; найдите значения A , B , C при $q = 2$, $t = -1$, $z = \frac{1}{2}$;
2) числа, буквы k , l , v , знаки арифметических действий и скобки; найдите значения A , B , C при $k = -3$, $l = -1$, $v = \frac{1}{3}$.

1.14°. Найдите значение выражения:

- 1) $|a| - |b| + |c| - |d|$, если $a = -2$, $b = 3$, $c = -8$, $d = -7$;
2) $-|a| + |b| - |c| + |d|$, если $a = -3$, $b = 3$, $c = -8$, $d = -7$.

1.15*. Имеет ли смысл числовое выражение, которое получится из выражения с переменной

$$A = \frac{3t - 5}{3 \cdot 2t - 0,25 \cdot 24t}, \text{ при:}$$

- 1) $t = 1$; 2) $t = 2$; 3) $t = -1$; 4) $t = 3$?

1.16. Периметр треугольника равен P , две его стороны равны a и b . Составьте выражение для нахождения третьей стороны и найдите его значение при:

- 1) $a = 9$ см, $b = 4$ см, $P = 20$ см;
2) $a = 5,2$ см, $b = 6,4$ см, $P = 13,5$ см.

1.17. Запишите утроенную разность чисел a и b . Найдите значение этого выражения при:

- 1) $a = 2,25$, $b = -3,41$; 2) $a = -0,12$, $b = -0,53$;
3) $a = -\frac{9}{4}$, $b = -\frac{5}{6}$; 4) $a = \frac{2}{15}$, $b = -\frac{7}{30}$.

1.18°. Какие из чисел -10 ; -5 ; -2 ; 0 ; 1 ; 2 ; 4 ; 6 не могут входить в область определения выражения A с переменной x :

- 1) $A = \frac{1+4x}{x-2}$; 2) $A = \frac{x+5}{x}$;
3) $A = x + \frac{x+3}{2x+10}$; 4) $A = x - \frac{18}{3x-12}$;
5) $A = (x-6)^{-2}$; 6) $A = (2x+10)^{-1}$;
7) $A = x^{-3} + \left(\frac{x+2}{x-1}\right)^0$; 8) $A = \left(\frac{x-4}{x+5}\right)^0 - x^2$?

1.19°. Какие из чисел -4 ; -3 ; 2 ; 3 ; 7 входят в естественную область определения выражения A с переменной a :

- 1) $A = \frac{2a}{a+3} + 2 + \frac{a}{a-3}$; 2) $A = \frac{4a}{a-1} + 7 + \frac{5}{a-5}$;
3) $A = \frac{a}{a+1} + \frac{5-a}{2}$; 4) $A = \frac{a+2}{a+4} - \frac{a-3}{6}$?

1.20°. Для выражения A с переменной a область определения состоит из чисел -3 ; -2 ; $-0,5$; 0 ; 1 ; 4 . Найдите все значения выражения A :

- 1) $A = 2a + 1$; 2) $A = 3a - 2$;
3) $A = \frac{a-3}{a+4} + 2$; 4) $A = \frac{a-8}{a+1} - 1$.

1.21. Укажите естественную область определения выражения:

- 1) $\frac{9(b+7)}{15b-3}$; 2) $\frac{9y-1}{2y+4}$;
3) $7(m-7)^0 - \frac{10}{m+1,1}$; 4) $5(x-4)^{-1} + \left(\frac{2x-8}{6-3x}\right)^0$;

5) $\left(\frac{17x+35}{2x-8}\right)^{-3} - \frac{1}{x};$

6) $\left(\frac{2+y}{y}\right)^0 - \frac{5}{16-4y};$

7) $\frac{10}{|a|-5};$

8) $\frac{23}{7-|b|};$

9) $\left(\frac{3+c}{6|c|+12}\right)^0;$

10) $\left(\frac{3m-4}{10+2|m|}\right)^{-2}.$



1.22. Решите уравнение:

1) $9,3 - (5,3 + y) = 7,3;$

2) $(y + 3,4) - 11,3 = -17,2;$

3) $-4,7 + (z - 9,7) = -2,7;$

4) $15,9 - (2,6 - x) = -20.$

1.23. Укажите область определения выражения A с переменной m , если:

1) $A = \frac{5}{m-3}$, m — натуральное число меньше 8;

2) $A = \frac{7}{m+4}$, m — целое отрицательное число больше -10 ;

3) $A = \frac{m^2-4}{(m+5)(m-6)}$, m — целое число больше -6 , но меньше 7;

4) $A = \frac{m^3+7}{(m-2)(m+10)}$, m — целое число больше -12 , но меньше 4.

1.24. Укажите естественную область определения выражения:

1) $\frac{x^3-2x+5}{(x+4)(x-7)};$

2) $\frac{2x^2+7x-4}{(x-2)(x+3)};$

3) $\left(\frac{|x|-5}{|x|-3}\right)^{-4};$

4) $\left(\frac{|x|-7}{|x|+4}\right)^0.$

1.3. Числовые равенства

Если два выражения (числовые или с переменными) A и B соединить знаком « $=$ », то получится запись $A = B$, называемая *равенством*. Выражение A называют *левой частью*, а выражение B — *правой частью* равенства.

Когда обе части равенства являются числовыми выражениями, то оно называется *числовым*. *Верное числовое равенство* — это такое равенство, в котором обе части имеют одно и то же значение.

А

Современный знак равенства « $=$ » был введен только в 1557 г. английским врачом и математиком Р. Рекордом с таким обоснованием: «Никакие два предмета не могут в большей степени быть равны между собой, как две параллельные линии (отрезка)». Этот знак « $=$ » даже вырезан на могильном камне Рекорда. Знак « $=$ » распространился в Европе благодаря трудам немецкого математика Г. Лейбница и его последователей.

Приведем примеры некоторых верных числовых равенств:

- а) $7 = 7$;
- б) $-2^2 + 3^2 = 5$;
- в) $5 \cdot 2^2 - 7 \cdot 3 = 7(3 - 4) + 2 \cdot 3 \cdot 17^0$.

Приведем примеры нескольких неверных числовых равенств:

- а) $7 = 6$;
- б) $7 \cdot 2^3 = 48$;
- в) $5 \cdot 2^2 - 7 \cdot 3 = 7 \cdot 3 - 4 + 2 \cdot 3^{-1}$.

Сформулируем некоторые свойства верного числового равенства.

Свойство 1. Если к обеим частям верного числового равенства прибавить одно и то же число или из обеих частей верного числового равенства вычесть одно и то же число, то получится верное числовое равенство.

Другими словами, если $a = b$ — верное числовое равенство, то при любом k

$$a + k = b + k \text{ и } a - k = b - k$$

— верные числовые равенства (рис. 6).

Из этого свойства следует:



если в верном числовом равенстве перенести слагаемое из одной части в другую с противоположным знаком, то получится верное числовое равенство.

В самом деле, если $a = b + c$ — верное числовое равенство, то верно и $a + (-c) = b + c + (-c)$, а значит, $a - c = b$ — тоже верное числовое равенство.

Свойство 2. Если обе части верного числового равенства умножить или разделить на одно и то же число, отличное от нуля, то получится верное числовое равенство.

Другими словами, если $a = b$ — верное числовое равенство, то при любом $k \neq 0$

$$ak = bk \text{ и } \frac{a}{k} = \frac{b}{k}$$

— верные числовые равенства (рис. 7).

Нам известно, что



если множители не равны нулю, то и произведение не равно нулю:

$\begin{aligned} \text{если } a \neq 0 \text{ и } b \neq 0, \\ \text{то } ab \neq 0. \end{aligned}$

Если $\overbrace{a = b}$,
 то $\overbrace{a + k = b + k}$
 и $\overbrace{a - k = b - k}$

Рис. 6

Если $\overbrace{a = b}$ и $k \neq 0$,
 то $\overbrace{a \cdot k = b \cdot k}$
 и $\overbrace{a : k = b : k}$

Рис. 7

Отсюда следует, что



если произведение равно нулю, то хотя бы один из множителей равен нулю:

$$\begin{array}{l} \text{если } ab = 0, \\ \text{то } a = 0 \text{ или } b = 0. \end{array}$$

(*)

▲ Докажем утверждение (*).

По условию $ab = 0$ — верное числовое равенство.

Если число $a \neq 0$, то существует обратное ему число $\frac{1}{a} \neq 0$.

Умножив обе части равенства $ab = 0$ на число $\frac{1}{a}$, получим (по свойству 2) верное числовое равенство

$$\frac{1}{a}(ab) = \frac{1}{a} \cdot 0, \text{ т. е. } b = 0. \quad \boxtimes \quad \blacktriangle$$

Пример 1. Записать верные числовые равенства, которые следуют из верного числового равенства $p = t$, используя знаки арифметических действий и число 2011.

Решение. На основании свойств 1 и 2 верными будут следующие числовые равенства:

$$\begin{array}{ll} p + 2011 = t + 2011; & p \cdot 2011 = t \cdot 2011; \\ p - 2011 = t - 2011; & p : 2011 = t : 2011. \end{array}$$

Пример 2. Записать утверждение, которое можно получить из равенства $(p + 7)(p - 20) = 0$, используя утверждение (*).

Решение. На основании утверждения (*), если произведение равно нулю, то хотя бы один из множителей равен нулю. Значит, если

$$(p + 7)(p - 20) = 0, \text{ то} \\ p + 7 = 0 \text{ или } p - 20 = 0.$$

▲ Пример 3. После умножения обеих частей равенства на число a и прибавления к обеим частям полученного равенства числа 37 получили верное числовое равенство. Можно ли утверждать, что исходное равенство верно?

Решение. Утверждать, что исходное числовое равенство было верным, нельзя, поскольку в условии не сказано, что число $a \neq 0$.

Например, $7 = 87$ — неверное числовое равенство, а равенства

$$7 \cdot 0 = 87 \cdot 0 \text{ и } 7 \cdot 0 + 37 = 87 \cdot 0 + 37$$

— это верные числовые равенства.

Ответ: нельзя. ▲

Заметим, что при решении упражнений и задач мы будем также использовать и неравенства, с которыми встречались в предыдущих классах при сравнении чисел. Подробно неравенства будут изучаться в 8-м классе, здесь же только скажем, что утверждение «число a больше числа b » (записывается $a > b$) означает, что разность $a - b$ — *положительное число*. Аналогично утверждение «число a меньше числа b » (записывается $a < b$) означает, что разность $a - b$ — *отрицательное число*.



1. Приведите пример равенства. Назовите его левую и правую части.
2. Приведите примеры верных числовых равенств.
3. Приведите примеры неверных числовых равенств.
4. Сформулируйте свойства верных числовых равенств.
5. При каком условии произведение чисел равно нулю?
6. После вычитания из обеих частей числового равенства числа a и умножения обеих частей полученного равенства на число 37 получили равенство $17 = 17$. Можно ли утверждать, что исходное равенство верно?
7. Что означает утверждение:
 - а) число a больше числа b ;
 - б) число a меньше числа b ?

Упражнения

1.25°. (Устно.) Укажите номера верных числовых равенств:

- | | |
|----------------------------------|--|
| 1) $3^2 = 2^3$; | 2) $2^3 = 7$; |
| 3) $0,5 = -0,5$; | 4) $1,102 = 1,111$; |
| 5) $\frac{3}{5} = \frac{3}{4}$; | 6) $\frac{2}{3} = 2 \cdot \frac{1}{3}$; |
| 7) $\frac{4}{5} = 0,8$; | 8) $\frac{1}{10^2} = 0,01$; |
| 9) $2\frac{3}{4} = 2,75$; | 10) $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = 0,125$; |
| 11) $0,3^2 = 0,09$; | 12) $0,5^2 = 0,025$. |

1.26°. (Устно.) Верно ли числовое равенство (ответ обоснуйте):

- 1) $3,2 + 9,8 = 9,8 + 2,3$;
- 2) $17,5 + \frac{2}{7} = 17,5 - 0,01$;
- 3) $36 : 0,01 = 3,6 \cdot 1000$;
- 4) $25 \cdot 0,1 = 0,25 : 0,1$;
- 5) $\frac{7}{8} - \frac{4}{9} = \frac{4}{9} - \frac{7}{8}$;

- 6) $\frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$;
- 7) $7,9 \cdot 0,6 = 0,3 \cdot 15,8$;
- 8) $3,2 \cdot 0,4 = 0,2 \cdot 6,4$;
- 9) $95 - 4,4 = 97 - 6,4$;
- 10) $74 + 3,7 = 76 + 1,7$?

1.27°. (Устно.) Верно ли равенство, если $m = p$ — верное числовое равенство (ответ обоснуйте):

- 1) $m + 4\frac{1}{7} = p + 4\frac{1}{7}$;
- 2) $m - 0,395 = p - 0,395$;
- 3) $m : \frac{2}{5} = p : 0,4$;
- 4) $m \cdot 4,75 = p : \frac{100}{475}$;
- 5) $m \cdot 2,3 = 3p - 0,7p$;
- 6) $m \cdot 1,1 = p - 0,1p$;
- 7) $m - 0,6m = p \cdot 1,6$;
- 8) $2m + 5 = 2,5p + 5 - 0,3p$;
- 9) $-p - m = 0$;
- 10) $m - p = 0$?

1.28°. Запишите в виде равенства утверждение:

- 1) произведение чисел a и 5 равно числу b ;
- 2) число m больше числа n на 2 ;
- 3) сумма чисел a и $-a$ равна 0 ;
- 4) произведение числа a и числа, ему обратного, равно 1 .

1.29. Запишите верные числовые равенства, которые следуют из верного числового равенства $3k + 2p = 7n + q$, используя знаки арифметических действий и число:

- 1) $-14,73$; 2) $-0,378$; 3) $0,098$; 4) $474,5$.

1.30. Запишите утверждения, которые можно получить из данного равенства, используя утверждение (*):

- | | |
|------------------------------|-----------------------------|
| 1) $(m + 2)(k + 3) = 0$; | 2) $(t + 8)(p - 4) = 0$; |
| 3) $(2p - 5)(p + 8) = 0$; | 4) $(3q + 1)(q - 9) = 0$; |
| 5) $k(3k + 12)(k - 2) = 0$; | 6) $(t + 5)t(2t - 7) = 0$. |

1.31°. Найдите, если возможно, какое-нибудь значение переменной a , при котором данное равенство обратится в неверное числовое равенство:

- 1) $8(a + 4) = 32 + 8a$;
- 2) $5a - 25 = 5(a - 5)$;
- 3) $12a + 5 = (2a + 1)5 + 2a$;
- 4) $7a - 9 = 4a + (a - 3)3$.

1.32*. Докажите, что:

- 1) если после деления обеих частей числового равенства $a = b$ на число 248 получится верное числовое равенство, то и равенство $a = b$ верное;
- 2) если после умножения обеих частей числового равенства $m = n$ на число 123 получится верное числовое равенство, то и равенство $m = n$ верное.

1.33. Укажите номера верных утверждений:

- 1) если $m = 5$, $k = 0$, то $mk = 0$;
- 2) если m — натуральное число и $k = 0$, то $mk = 0$;
- 3) если k — целое число и $m = 0$, то $mk = 0$;
- 4) если m и k — любые числа, то $mk = 0$;
- 5) если $m = k = 0$, то $mk = 0$;
- 6) если $m = 0$ или $k = 0$, то $mk = 0$;
- 7) если $m = 0$, $k \neq 0$, то $mk = 0$;
- 8) если $m \neq 0$ и $k \neq 0$, то $mk = 0$.

1.34*. Укажите номера верных утверждений:

- 1) если $mpt = 0$, то возможно $m = p = t = 0$;
- 2) если $mpt = 0$, то обязательно $m = 0$;
- 3) если $mpt = 0$, то $p = 0$ или $t = 0$;
- 4) если $mpt = 0$, то $m = 0$ или $p = 0$ или $t = 0$;
- 5) если $mpt = 0$, то m, p, t — натуральные числа;
- 6) если $mpt = 0$, то только один из множителей равен 0;
- 7) если $mpt = 0$, то хотя бы один из множителей равен 0;
- 8) если $mpt = 0$, то один из множителей обязательно равен 0.

1.35*. 1) Произведение четырех чисел равно нулю. Могут ли среди них быть:

- а) два равных числа;
- б) два взаимно противоположных числа;
- в) два взаимно обратных числа?

2) Произведение двух чисел равно нулю. Могут ли среди них быть:

- а) два равных числа;
- б) два взаимно противоположных числа;
- в) два взаимно обратных числа?

1.4. Раскрытие скобок.

Вынесение общего множителя за скобки.

Приведение подобных слагаемых

Напомним, что разность чисел a и b равна сумме чисел a и $(-b)$:

$$a - b = a + (-b).$$

Поэтому, например, мы можем говорить «сумма $a - b + c$ », имея в виду, что

$$a - b + c = a + (-b) + c.$$

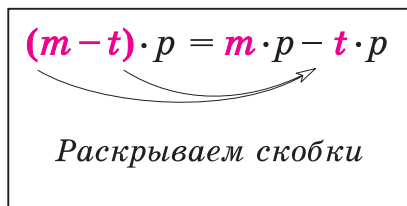
Рассмотрим распределительный закон:

$$(a + b)c = ac + bc.$$

Когда мы переходим в этом равенстве от левой части к правой, то говорим, что **раскрываем скобки**. Если же мы переходим в равенстве от правой части к левой, т. е. представляем его в виде

$$ac + bc = (a + b)c,$$

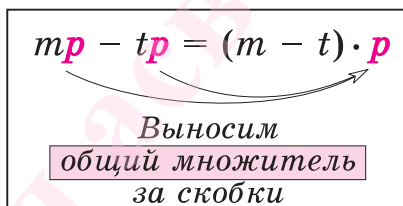
то говорим, что **выносим общий множитель за скобки**. Аналогично для разности (рис. 8, 9).



$$(m - t) \cdot p = m \cdot p - t \cdot p$$

Раскрываем скобки

Рис. 8



$$m \cdot p - t \cdot p = (m - t) \cdot p$$

Выносим
общий множитель
за скобки

Рис. 9

Применять распределительный закон можно для любого числа слагаемых. Например,

$$(a + b + c + d)k = ak + bk + ck + dk;$$

$$am - bm + cm = m(a - b + c).$$

А

Круглые скобки впервые использовали в своих трудах М. Штифель (1544 г., Германия) и Д. Кардано (1545 г., Италия). Немецкий термин *Klammer* — скоба — введен Леонардом Эйлером в 1770 г. Статьи и книги Л. Эйлера, в которых всюду употреблялись скобки, содействовали тому, что к середине XVIII в. скобки стали употребляться во всех математических книгах.

Пример 1. Раскрыть скобки:

а) $a + 3b + 2(4c - d + 5k)$; б) $a + 3b - 2(4c - d + 5k)$.

Решение. Эти примеры решаются на основании распределительного закона.

$$\begin{aligned} \text{а) } a + 3b + 2(4c - d + 5k) &= \\ &= a + 3b + 2 \cdot 4c + 2(-d) + 2 \cdot 5k = \\ &= a + 3b + 8c - 2d + 10k; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б) } a + 3b - 2(4c - d + 5k) &= \\ &= a + 3b + (-2)(4c - d + 5k) = \\ &= a + 3b + (-2)4c + (-2)(-d) + (-2)5k = \\ &= a + 3b - 8c + 2d - 10k. \end{aligned}$$

Пример 2. Раскрыть скобки:

$$a + 3b - (4c - d + 5k).$$

Решение. В этом примере перед скобками стоит знак «минус». Чтобы применить распределительный закон, перед скобками записывают множитель (-1) .

$$\begin{aligned} a + 3b - (4c - d + 5k) &= a + 3b + (-1)(4c - d + 5k) = \\ &= a + 3b + (-1)4c + (-1)(-d) + (-1)5k = \\ &= a + 3b - 4c + d - 5k. \end{aligned}$$

Решить этот пример можно быстрее, если заметить, что



когда перед скобками стоит знак «минус», то, раскрывая скобки, мы знак каждого слагаемого меняем на противоположный (рис. 10).

<i>Минус перед скобками</i> $-(a - b + c - d) = -a + b - c + d$ <i>изменяет знаки всех слагаемых</i>

Рис. 10



Используя это правило, сразу запишем:

$$a + 3b - (4c - d + 5k) = a + 3b - 4c + d - 5k.$$

Заметим, что когда перед скобками стоит знак «плюс», то, раскрывая скобки, знак каждого слагаемого оставляют без изменения.

Пример 3. Вынести за скобки множитель (-1) в выражении $-b + 5c - 4d + 6$.

Решение.

$$\begin{aligned} -b + 5c - 4d + 6 &= (-1)b + (-1)(-5c) + (-1)4d + (-1)(-6) = \\ &= (-1)(b + (-5c) + 4d + (-6)) = -(b - 5c + 4d - 6). \end{aligned}$$

Заметим, что



если мы выносим за скобки множитель (-1) , то в скобках знак каждого слагаемого меняем на противоположный (рис. 11).

Вынесение -1 за скобки

$$\begin{aligned} a - 2b + m - p + 5 &= (-1)(-a + 2b - m + p - 5) = \\ &= -(-a + 2b - m + p - 5) \end{aligned}$$

изменяет знаки всех слагаемых

Рис. 11



Используя это правило, можно записать:

$$-b + 5c - 4d + 6 = -(b - 5c + 4d - 6).$$

Рассмотрим сумму

$$2m - 4m + 3m - 4m,$$

где m — переменная. Слагаемые этой суммы $2m$, $-4m$, $3m$ и $-4m$ отличаются друг от друга только числовыми множителями либо совсем не отличаются. Все они содержат общую буквенную часть — переменную m . Слагаемые, которые отличаются друг от друга только числовыми множителями или одинаковы, называются **подобными**. Числовой множителем в каждом из этих слагаемых называется **коэффициентом** (рис. 12).

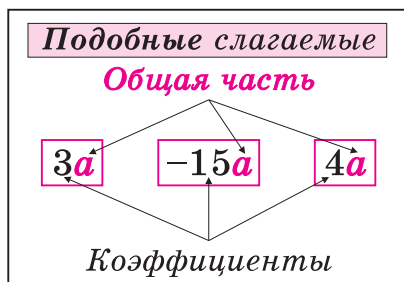


Рис. 12

Таким образом, **слагаемые называются подобными**, если они одинаковы или отличаются только коэффициентами.

Используя распределительный закон, можно упрощать выражения, которые содержат подобные слагаемые. Например,

$$\begin{aligned}
 & 2t - 4t + 3t - 4t = \\
 & \quad \downarrow \begin{array}{l} \text{вынесем в этой сумме за скобки} \\ \text{общий множитель — переменную } t \end{array} \downarrow \\
 & \quad = (2 - 4 + 3 - 4)t = \\
 & \quad \downarrow \text{выполнив действия в скобках, получим} \downarrow \\
 & \quad = (-3)t = -3t.
 \end{aligned}$$

Такое упрощение суммы называется **приведением подобных слагаемых**.

Приведение
подобных слагаемых

$$3a - 15a + 4a =$$

Общий множитель

$$= (3 - 15 + 4)a = -8a$$

Сумма коэффициентов

Рис. 13

Чтобы привести подобные слагаемые, нужно найти сумму коэффициентов и умножить ее на общий буквенный множитель (рис. 13).

Пример 4. Привести подобные слагаемые:

- а) $5y + 7y - 9y$;
- б) $15b + 20b - 35b + b$.

Решение. а) $5y + 7y - 9y = (5 + 7 - 9)y = 3y$;
 б) $15b + 20b - 35b + b = (15 + 20 - 35 + 1)b = 1b = b$.

Пример 5. Упростить выражение

$$(3a - 2b) - (-4a - b) - (-4b + 5).$$

Решение. $(3a - 2b) - (-4a - b) - (-4b + 5) =$

↓ раскрыв скобки, получим ↓

$$= 3a - 2b + 4a + b + 4b - 5 =$$

↓ используя переместительный закон, получим ↓

$$= (3a + 4a) + (-2b + b + 4b) - 5 =$$

↓ приведем подобные слагаемые ↓

$$= (3 + 4)a + (-2 + 1 + 4)b - 5 =$$

$$= 7a + 3b - 5.$$

Пример 6. Решить уравнение

$$12(3x - 1) - (4x + 2) = 50.$$

Решение. $12(3x - 1) - (4x + 2) = 50$;

↓ раскрыв скобки, получим ↓

$$36x - 12 - 4x - 2 = 50;$$

↓ приведя подобные слагаемые, получим ↓

$$32x - 14 = 50;$$

$$32x = 64;$$

$$x = 2.$$

Ответ: 2.



1. Запишите основные свойства (законы) сложения и умножения чисел.
2. Почему выражение « $a - b$ » можно назвать суммой?
3. Как раскрыть скобки, если перед ними стоит знак «минус»? А если знак «плюс»?
4. Как вынести множитель (-1) за скобки?
5. Какие слагаемые называются подобными? Приведите примеры подобных слагаемых.
6. На каком законе арифметических действий основано приведение подобных слагаемых? Сформулируйте его.
7. Как привести подобные слагаемые?

Упражнения



Вычислите (1.36—1.40).

- 1.36°.** 1) $16 + (-20) + 14 + (-10)$;
2) $13 + (-9) + (-17) + 19$;
3) $-7 + (-18) + 11 + (-5) + 9 + (-13) + (-22) + (-35)$;
4) $-29 + (-3) + (-14) + 12 + (-6) + (-17) + 8 + (-31)$;
5) $0,75 + (-2,95) + 4,799 + (-1,05) + 15,201$;
6) $-5,28 + (-7,62) + 1,56 + (-1,72) + (-4,38) + 8,44$;
7) $-4\frac{2}{7} + (-8,53) + (-3,06) + \left(-15\frac{5}{7}\right) + (-1,47) +$
 $+ (-1,94)$;
8) $-16,91 + (-3,83) + \left(-2\frac{4}{13}\right) + (-21,17) + (-3,09) +$
 $+ \left(-7\frac{9}{13}\right)$.
- 1.37°.** 1) $368 + 283 + 402 + 317 + 230$;
2) $374 + 93 + 28 + 526 + 12$;
3) $565 + 279 + 473 + 135 + 321 + 425 + 327$;
4) $121 + 432 + 285 + 268 + 215 + 75 + 779$.
- 1.38.** 1) $-0,75(-5)8(-2)$;
2) $-0,25(-6)4(-9)$;
3) $-\frac{2}{7} \cdot 0,25\left(-\frac{7}{16}\right)(-8)36$;
4) $-\frac{2}{3}(-0,2)\frac{7}{16} \cdot 5(-24)$;
5) $23,5\left(-\frac{7}{12}\right) \cdot 0 \cdot 2\left(-\frac{24}{49}\right)$;
6) $-14,2\left(-\frac{13}{15}\right)(-5) \cdot 0 \cdot \frac{75}{78}$;
7) $-0,25(-13)(-8)(-0,4)(-250)$;
8) $-0,125(-0,4)(-25)(-80)(-11)$;
9) $125(-0,8)\left(-2\frac{2}{3}\right)\frac{5}{7} \cdot 1\frac{2}{5}\left(-\frac{3}{8}\right)$;
10) $-25 \cdot 0,04 \cdot 3\frac{1}{4}\left(-\frac{4}{13}\right)5\frac{1}{6}\left(-\frac{6}{31}\right)$.

- 1.39. 1) $524 \cdot 28 + 524 \cdot 72$;
2) $273 \cdot 39 + 273 \cdot 61$;
3) $945 \cdot 38 - 38 \cdot 944$;
4) $1247 \cdot 75 - 1246 \cdot 75$;
5) $351 \cdot 5,6 + 351 \cdot 14,4$;
6) $231 \cdot 9,4 + 231 \cdot 20,6$;
7) $\frac{1}{37} \cdot \frac{5}{4} + \frac{1}{37} \cdot \frac{3}{5}$;
8) $\frac{1}{13} \cdot \frac{6}{7} - \frac{5}{8} \cdot \frac{1}{13}$.

- 1.40. 1) $(67 \cdot 3,8 + 67 \cdot 1,2) : 5$;
2) $(93 \cdot 1,1 + 93 \cdot 1,9) : 3$;
3) $(51 \cdot 81 + 29 \cdot 81 - 40 \cdot 81) : 20$;
4) $(162 \cdot 43 + 38 \cdot 43 - 50 \cdot 43) : 75$;
5) $\left(\frac{11}{17} \cdot \frac{2}{5} + \frac{11}{17} \cdot \frac{3}{10} - \frac{2}{15} \cdot \frac{11}{17}\right) : \frac{1}{15}$;
6) $\left(\frac{5}{7} \cdot \frac{2}{3} - \frac{5}{7} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{7}\right) : \frac{1}{6}$.

1.41°. Представьте выражение в виде суммы:

- 1) $m - 3k$; 2) $4p - 0,3$;
3) $-5 - 0,7t$; 4) $-2n - 15$.

1.42°. Запишите выражение в виде произведения двух множителей, один из которых равен -1 :

- 1) $-a$; 2) $-m$; 3) $-4p$; 4) $-7n$;
5) $5t$; 6) $3n$; 7) k ; 8) c ;
9) -1 ; 10) 0 ; 11) 3 ; 12) $-1,3$.

1.43°. Найдите значение выражения:

- 1) $A = 796,3 \cdot 53,74(34 - 17 \cdot 2) + 0,2 \cdot 5 \cdot 0,7$;
2) $B = 0,1987 \cdot 659,41 \cdot 23(0,25 \cdot 4 - 0,5 \cdot 2) - 2$.

1.44. Раскройте скобки:

- 1) $0,9 - (m - 1,9)$; 2) $0,4 - (0,8 - p)$;
3) $-(k - 3) - 7$; 4) $-(b - 2) - 5$;

- 5) $-(p + 2t - c) + 5$; 6) $4 - (t - 3k - m)$;
7) $-(-a - b) - (2p + 3t)$; 8) $-(c + d) - (-5k - 3)$;
9) $(-a - b) + (-3t + 2p)$; 10) $(c + d) + (-4 - 5k)$.

1.45. Вынесите множитель (-1) за скобки:

- 1) $c + (m + n)$; 2) $a + (n - b)$;
3) $n - (-t + k)$; 4) $b - (m + d)$;
5) $(a + k) + (-c + d)$; 6) $(d + l - 3) + (-3y + m)$;
7) $(-m - n) - (2t - c)$; 8) $(m - n) - (-4b - a)$;
9) $(m - 3) - (-k - c + 5)$; 10) $(s - t) - (n - m - 4)$.



1.46. Чему равно число m , если единица составляет:

- 1) 1 % от m ; 2) 2 % от m ;
3) 5 % от m ; 4) 10 % от m ;
5) 20 % от m ; 6) 25 % от m ;
7) 50 % от m ; 8) 75 % от m ;
9) 100 % от m ; 10) 200 % от m ?

1.47°. Приведите подобные слагаемые:

- 1) $4m - 5m - 11m + 4m - m$;
2) $6k - 2k + 12k + k - 3k$;
3) $b - 13b + 10b + 6b - 10b$;
4) $t + 17t - 5t - 13t + 5t$;
5) $a + 3a - 8a + 4a - 5$;
6) $3 + 7c - 11c + 4c$.

1.48°. Запишите разность двух выражений и упростите ее:

- 1) $a - 16$ и $9 + a$; 2) $p - 37$ и $37 + p$;
3) $a + b$ и $p + a$; 4) $-t - k$ и $t + k$;
5) $-m + n$ и $n - m$; 6) $b - a$ и $b + a$;
7) $p - t$ и $-t + p$; 8) $-x - y$ и $z - y$;
9) p и $-x - y + p$; 10) $-k$ и $a - b + k$.

1.49. Приведите подобные слагаемые:

- 1) $14y - 14x + 5y - 2x + 3$;
- 2) $-8m - 9n + 7m + 18n - 5$;
- 3) $11,5p + 4,5p + 13 - 7,5p$;
- 4) $-4,6t + 7,8t - 5t + 9$;
- 5) $x + 8,4x - 9,9x - 15x$;
- 6) $3,6a - 2,4a + a - 5,4a$;
- 7) $-17m - 13b + 9,3m + 4,8b$;
- 8) $4,2k - 1,9n - 12k + 8n$;
- 9) $\frac{3}{2}a - \frac{9a}{16} - \frac{31}{32}a - \frac{1}{4}a$;
- 10) $\frac{1}{6}b - \frac{9}{5}b + \frac{11}{18}b - \frac{7}{36}b$.

1.50°. Дано: $A = 2x + y$, $B = x - 2y + 3$, $C = 5x - 4$.

Запишите выражение и упростите его:

- 1) $A + B + C$;
- 2) $A - B + C$;
- 3) $A - B - C$;
- 4) $-A + B - C$;
- 5) $-A - B + C$;
- 6) $-A - B - C$.

1.51°. Найдите значение выражения:

- 1) $(-6)(3a + 8) - 3(a - 5)$ при a , равном $-2,5$; $\frac{2}{3}$; $0,8$;
- 2) $2(3 - a) - 4(2a - 1)$ при a , равном $-0,1$; $\frac{4}{5}$; 2 .

Раскройте скобки и приведите подобные слагаемые (1.52—1.55).

- 1.52. 1) $0,7 - (p - 1,7)$;
 - 2) $-(26,3 - b) - 10,7$;
 - 3) $-(9,3 - y) + 35,3$;
 - 4) $-0,39 - (15,41 - a)$;
 - 5) $t - (7,4 + t)$;
 - 6) $-m - (5,3 - m)$.
- 1.53. 1) $p - (a + p)$;
 - 2) $b - (b - a)$;
 - 3) $(m - y) - m$;
 - 4) $b + (p - b)$;
 - 5) $-m - (a - b - m)$;
 - 6) $t - (p - x + t)$;
 - 7) $-24 + (24 - y)$;
 - 8) $13 + (x - 13)$.

- 1.54.** 1) $t + (y - t) + (p + t)$; 2) $-y + (a - n) + (y - a)$;
3) $p - (b + y) - (b - y)$; 4) $n - (x - m) - (n - x)$;
5) $16a - 8(a + b) - 6b$; 6) $24b - 8(2b + p) + 18p$;
7) $(2a + 5b) + 2(8a - 11b) - (9b - 5a)$;
8) $3(3x - 10y) - (6x - 3y) + (6y - 8x)$.
- 1.55.** 1) $(8a + 3c) - (-7a - (11c + 4)) - (-3a - 8)$;
2) $(3m + 4n) - (2m - (3n - 5)) - (-4m - 16)$;
3) $(x + y - z) - (y + z) + (z - (x + y))$;
4) $(a - c) - (a - (b + c)) - (a - b - c)$;
5) $(5a - (3b - c)) - (8b - 8a - c) + (3b - 7c)$;
6) $(2t - 3m + p) - (t - (5p - m)) - (m + p - t)$;
7) $(3m - (8t - k)) - (5t + 4m - 3k) - 2k$;
8) $(8x + 3y - z) - (x - (y - 2z)) - 4y$.

Решите уравнение (1.56—1.58).

- 1.56.** 1) $6x - (4x - 1) = 13$;
2) $28 - (3x - 6) = 37$;
3) $(2x + 6) - (x - 1) = 10$;
4) $(4x - 3) - (2x + 7) = 22$;
5) $(3x - 1) - (2 + x) = 13$;
6) $(5 - x) - (8 - 4x) = 18$.
- 1.57.** 1) $4(5 - x) - (3x - 6) = 0$;
2) $5(3 + 2x) - 2(4 + x) = 0$;
3) $3(2 - 3x)(-1) + 7(4 - 2x) = 12$;
4) $2(4 - 5x)(-1) - (6 + 7x) = 5$.
- 1.58.** 1) $3(1 - 2x) - 6(3x - 4) - 5(3 - x) = 88$;
2) $23 - 7(3x - 1) - 3(x + 1) = 0$;
3) $7(6x + 1) + 4(2 - 3x) - 9(9x + 4) = 30$;
4) $45 - 3(2x + 1) - 2(x + 3) + 5(x - 7) = 0$.



1.59. Назовите:

- 1) наибольшее однозначное число;
- 2) наименьшее двузначное число;
- 3) наименьшее натуральное число;

- 4) наибольшее целое отрицательное число;
- 5) наименьшее двузначное число, кратное 5;
- 6) наибольшее двузначное число, кратное 6.



1.60. Отметьте на координатной прямой все точки, изображающие:

- 1) четные числа, модуль которых больше 5, но меньше 8;
- 2) целые числа, модуль которых меньше 5, но больше 1;
- 3) целые числа, кратные 4, модуль которых меньше 12;
- 4) целые числа, кратные 3, модуль которых больше 4, но меньше 12.

1.5. Тождества

Пусть A и B — выражения. Равенство $A = B$ называется *тождеством*, если оно обращается в верное числовое равенство при любых значениях переменных, для которых оба выражения A и B определены (т. е. имеют смысл).

Верное числовое равенство также является тождеством.

На рисунках 14 и 15 приведены примеры тождеств.

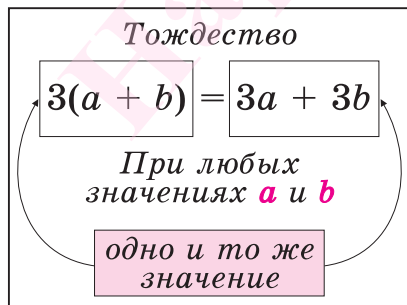


Рис. 14

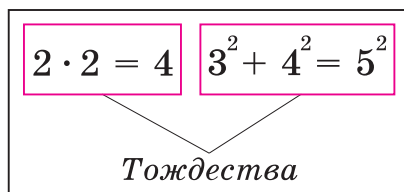


Рис. 15

Когда равенство $A = B$ является тождеством, то говорят, что *выражения A и B являются тождественно равными в общей области определения*.



Согласно определению, чтобы доказать, что равенство $A = B$ является тождеством, надо:

- 1) выяснить, при каких значениях переменных оба выражения A и B имеют смысл, т. е. какие значения переменных входят как в естественную область определения выражения A , так и в естественную область определения выражения B ;
- 2) установить, что при всех этих значениях переменных равенство $A = B$ обращается в верное числовое равенство.

Пример 1. Объясните, почему равенство является тождеством:

а) $7 + x = x + 7$; б) $(7 + x)y = 7y + xy$.

Решение. а) Равенство $7 + x = x + 7$ является тождеством, поскольку обе части этого равенства имеют смысл при любых значениях x и при любых значениях x оно обращается в верное числовое равенство согласно переместительному закону сложения.

б) Равенство $(7 + x)y = 7y + xy$ является тождеством, поскольку обе части этого равенства имеют смысл при любых значениях x и y и при любых значениях x и y они принимают одинаковые значения (поясните почему).

Рассмотренные в примере 1 тождества состоят из выражений, имеющих смысл при любых значениях переменных. Более сложные примеры будут рассмотрены в главе 6.

Пример 2. Доказать, что равенство

$$9(a - b) = 9a - b$$

не является тождеством.

Доказательство. Пусть, например, $a = 3$ и $b = 2$. Найдем значения левой и правой частей данного равенства:

$$9(a - b) \Big|_{\substack{a=3 \\ b=2}} = 9(3 - 2) = 9 \cdot 1 = 9;$$

$$9a - b \Big|_{\substack{a=3 \\ b=2}} = 9 \cdot 3 - 2 = 27 - 2 = 25.$$

Итак, при $a = 3$ и $b = 2$ значения левой и правой частей данного равенства различны, поэтому оно не является тождеством.

Таким образом,



чтобы установить, что равенство $A = B$ не является тождеством, достаточно указать такие значения переменных, при которых оба выражения A и B определены, а данное равенство не обращается в верное числовое равенство.



1. Что называется тождеством?
2. Всегда ли в тождествах содержится переменная?
3. Можно ли любое числовое равенство назвать тождеством?
4. Как показать, что равенство с переменной (переменными) не является тождеством?
- 5*. Является ли равенство $a^2 : a = a$ тождеством?

Упражнения

1.61°. Подберите три пары значений m и n , при которых выражение не имеет смысла:

1) $\frac{2x}{m - n}$; 2) $\frac{4}{m - 2n}$;

3) $\frac{7 + m}{m \cdot n + 1}$; 4) $\frac{n}{mn - 4}$.

1.62°. Объясните, почему равенство является тождеством:

- 1) $y - 9 = -(9 - y)$;
- 2) $x + 5 = -(-x - 5)$;
- 3) $3a + 5b = 5b + 3a$;
- 4) $(a - 4)(b + 7) = (b + 7)(a - 4)$;
- 5) $6y(x + z) = 6xy + 6yz$;
- 6) $(34a - 51b) : 17 = 2a - 3b$;
- 7) $\frac{2+3}{a^2+9} = \frac{4+1}{9+a^2}$;
- 8) $\frac{b^4+10}{-4+2} = \frac{b^4+10}{2-4}$.

1.63. Является ли тождеством равенство:

- 1) $4x - 4x = 0$;
- 2) $a - b = b - a$;
- 3) $5x + 4y = 4y + 5x$;
- 4) $4(x + y) = 2(2x + 2y)$;
- 5) $a \cdot 0 = a$;
- 6) $3x + 2y = (3x + 2y) \cdot 0$;
- 7) $3x + 5 = 3(x + 5)$;
- 8) $(t - t) : (t + t) = 0$?

Укажите номера равенств, которые являются тождествами (**1.64—1.65**).

- 1.64.**
- 1) $5x = 2,5(3x - x)$;
 - 2) $7(4y - y) = 2,1y \cdot 10$;
 - 3) $a + b - c = a - (c - b)$;
 - 4) $a - b - c = a - (b + c)$;
 - 5) $2x + 1 = 0$;
 - 6) $6(x - 4) = 0$.

- 1.65.**
- 1) $c(d - 7) = cd - 7c$;
 - 2) $9n + 45 = (n + 5)9$;
 - 3) $m + p - k = (p - k) + m$;
 - 4) $m - p + k = (m + k) - p$;
 - 5) $\frac{1}{2}(2x - 4) - x = 2$;
 - 6) $x + \frac{1}{3}(9 - 3x) - 3 = 0$;
 - 7) $\frac{35t + 15}{5} = 7t + 3$;
 - 8) $4 - 9t = \frac{12 - 27t}{3}$.

1.66. Объясните, почему равенство не является тождеством:

1) $5a - 2 = 3a$;

2) $9x - x = 9$;

3) $3a + 1 = 3(a + 1)$;

4) $7x - 2 = 7(x - 2)$;

5) $4ab + b = 4a + 2b$;

6) $2ab - b = 2a$.

1.67°. Напишите число, противоположное числу:

$5, -5, a, -a, a + b, -(a + b).$

1.68. Верно ли утверждение:

1) противоположным числу $-a$ является число $-(-a)$;

2) противоположным числу $-a$ является число a ;

3) противоположным числу $-(a + b)$ является число $a + b$;

4) противоположным числу $-(a + b)$ является число $-(-(a + b))$?

1.6. Тожественные преобразования

Используя законы арифметических действий, одно выражение можно заменить другим, тождественно равным ему, но более простым.

Приведем пример упрощения выражения:

$$10(ac - bc) + 5c(a + b) + 5bc =$$

↓ применив распределительный закон, ↓
раскроем скобки

$$= 10ac - 10bc + 5ca + 5cb + 5bc =$$

↓ применив переместительный закон умножения, ↓
в каждом слагаемом расставим буквенные
множители по алфавиту

$$= 10ac - 10bc + 5ac + 5bc + 5bc =$$

↓ применим переместительный закон сложения ↓

$$= 10ac + 5ac - 10bc + 5bc + 5bc =$$

↓ применив сочетательный закон сложения, ↓
↓ объединим подобные слагаемые в скобки ↓

$$= (10ac + 5ac) + (-10bc + 5bc + 5bc) =$$

↓ применим распределительный закон ↓

$$= (10 + 5)ac + (-10 + 5 + 5)bc =$$

↓ вычислим значения выражений в скобках ↓

$$= 15ac + 0bc = 15ac.$$

Преобразование одного выражения в другое, тождественно равное ему, называется *тождественным преобразованием*.

Примерами тождественных преобразований являются: раскрытие скобок, приведение подобных слагаемых, вынесение общего множителя за скобки.

Пример 1. Найти значение выражения

$$A = (9m + 4n)0,1a - (3m - 4n)0,5a$$

при $a = 2$, $n = 3,5$, $m = 4$.

Решение. Преобразуем выражение

$$\begin{aligned} A &= (9m + 4n)0,1a - (3m - 4n)0,5a = \\ &= 0,9ma + 0,4na - 1,5ma + 2na = \\ &= (0,9am - 1,5am) + (0,4an + 2an) = \\ &= (0,9 - 1,5)am + (0,4 + 2)an = \\ &= -0,6am + 2,4an = 0,6a(-m + 4n) = 0,6a(4n - m) \end{aligned}$$

(все преобразования проведены с использованием законов арифметических действий — назовите их).

При $a = 2$, $n = 3,5$, $m = 4$ получим

$$A = 0,6 \cdot 2(4 \cdot 3,5 - 4) = 1,2 \cdot 10 = 12.$$

Ответ: $A = 12$.



В тетради запись нахождения значения выражения A можно оформить так:

$$A \left| \begin{array}{l} a=2 \\ n=3,5 \\ m=4 \end{array} \right. = 0,6a(4n - m) \left| \begin{array}{l} a=2 \\ n=3,5 \\ m=4 \end{array} \right. =$$

$$= 0,6 \cdot 2(4 \cdot 3,5 - 4) = 1,2 \cdot 10 = 12.$$

Когда нужно доказать, что равенство $A = B$ является тождеством, используются тождественные преобразования.

Доказательство тождества проводят одним из способов:



1) применяют тождественные преобразования к одной из частей равенства (обычно более сложной по виду), в результате которых получают другую часть;

2) тождественными преобразованиями каждую часть равенства (по очереди) приводят к одному и тому же выражению;

3) применяют тождественные преобразования к разности левой и правой частей равенства, т. е. к выражению $A - B$. Если равенство $A = B$ является тождеством, то в результате преобразований получается нуль.

Пример 2. Доказать тождество

$$5(a - b + c) + 3(a - c) = 6(b - c) - 11b + 8(c + a).$$

Доказательство. Пусть A — левая часть равенства, а B — правая, тогда:

$$\begin{aligned} A &= 5a - 5b + 5c + 3a - 3c = \\ &= (5a + 3a) - 5b + (5c - 3c) = 8a - 5b + 2c; \\ B &= 6b - 6c - 11b + 8c + 8a = (6b - 11b) + (-6c + 8c) + 8a = \\ &= (6 - 11)b + (-6 + 8)c + 8a = -5b + 2c + 8a = 8a - 5b + 2c. \end{aligned}$$

Получили, что $A = B$ — тождество.

Пример 3. Является ли тождеством равенство

$$3(k + p - 2) + 4(k - 2p) = 7k + 5(p + 5)?$$

Решение. *Способ 1.* Пусть A — левая часть равенства, а B — правая, тогда:

$$\begin{aligned} A - B &= 3k + 3p - 6 + 4k - 8p - 7k - 5p - 25 = \\ &= (3k + 4k - 7k) + (3p - 8p - 5p) - 6 - 25 = \\ &= (3 + 4 - 7)k + (3 - 8 - 5)p - 6 - 25 = \\ &= 0k + (-10)p - 31 = -10p - 31. \end{aligned}$$

Мы не получили в результате преобразований нуль, значит, $A = B$ не является тождеством.



Способ 2. При $k = p = 0$ получим $A = 3(-2) = -6$, а $B = 5 \cdot 5 = 25$, т. е. $-6 = 25$ — неверное числовое равенство, следовательно, равенство $A = B$ не является тождеством (поясните почему).

На рисунке 16 приведен еще один пример.

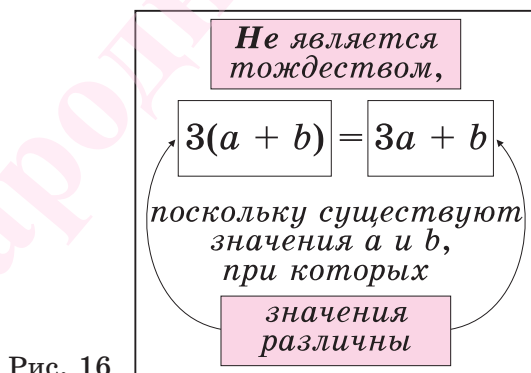


Рис. 16



Достаточно указать **один** набор значений переменных, при которых равенство $A = B$ обращается в неверное числовое равенство, чтобы утверждать, что оно **не является тождеством**.



1. Какое преобразование выражения называется тождественным?
2. Приведите примеры тождественных преобразований.
3. Назовите способы доказательства тождества.
4. Можно ли считать равенство $A = B$ тождеством, если оно обращается в верное числовое равенство при семи разных значениях переменной?
5. Можно ли утверждать, что равенство $A = B$ не является тождеством, если оно обращается в неверное числовое равенство при одном значении переменной?

Упражнения

1.69°. Выполните тождественные преобразования:

- | | |
|-----------------------------|------------------------------|
| 1) $m - (3n + 4y)$; | 2) $m - (2n - 3y)$; |
| 3) $m - ((n - x) - y)$; | 4) $m + (b - (x - y))$; |
| 5) $n + (y - (x - a))$; | 6) $m - (b - (y - n))$; |
| 7) $-(4 - m + (3n - 4y))$; | 8) $-(1 - (2m - 3n) - 4y)$. |

1.70°. Выполните тождественные преобразования, заключив в скобки слагаемые, содержащие буквы p и q , и поставив перед скобками знак «минус»:

- | | |
|------------------------------|-------------------------------|
| 1) $2a + q + 7p - 4c$; | 2) $5x - 2q - p - 7k$; |
| 3) $3a - p - 2c - q + 6x$; | 4) $a + 8p + 19a - 3q + 4c$; |
| 5) $c - 4x - 5p - 12y + q$; | 6) $9c - p + 3b - 3a - 2q$. |

Раскройте скобки и приведите подобные слагаемые (1.71—1.72).

- 1.71°.**
- 1) $4(3y - 1) - 5(y + 3) + 6(4y - 4)$;
 - 2) $3(8m - 1) - 7(2m + 2) - 8(7 - 4m)$;
 - 3) $(2,3a - 4,9b) - (7,2b - 2,1a)$;
 - 4) $(8,2a + 2,8y) - (-11,6x - 9,4y)$;
 - 5) $8x - (6x - (2x - 1))$;
 - 6) $9y - ((3y - 2) + 4)$;

$$7) \frac{16}{3} \left(\frac{3}{4}a + \frac{3}{8} \right) - \frac{4}{9} \left(\frac{9}{2}a - 9 \right);$$

$$8) \frac{3}{4} \left(\frac{4}{3}a - \frac{1}{15} \right) - \frac{4}{7} \left(\frac{84}{5}a - \frac{7}{5} \right).$$

$$1.72^\circ. 1) 3(a - y) - (y - 2a)4;$$

$$2) 4(8y - 3m) - 3(3y - 2m);$$

$$3) -4(3x + 5y) - 5(2x - 0,2y) - 20y + 10x;$$

$$4) 13x - (x - 2y)4 + 2(3x - 4y) + 15y;$$

$$5) (2a + 4b - 3)y - (a + 5b - 4)2y;$$

$$6) (3m - 2p + 4)5 - 2(4m + 3p - 1);$$

$$7) \left(\frac{1}{5}x - \frac{1}{6}y \right) 30t - (4x - 24y) \frac{1}{4};$$

$$8) (8x - 2y) \frac{1}{2}a - \left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{4}y \right) 12a.$$

Покажите, что равенство не является тождеством (1.73—1.74).

$$1.73^\circ. 1) m - 5^2 = 3^3;$$

$$2) 2^3 + m = 3^2;$$

$$3) a^2 + b^2 = a^2 b^2;$$

$$4) a^2 + b^2 = 2(a + b);$$

$$5) a^2 + a = a^3;$$

$$6) a \cdot 2a = a^2;$$

$$7) a \cdot 2a = a^3;$$

$$8) a + a + a = a^3.$$

$$1.74^\circ. 1) (6 - 2)(3a - a) = 4 + 2a;$$

$$2) (2 + 3)(a + a) = 2a + 3a;$$

$$3) 5x - x = 5;$$

$$4) (3x + 8) : 8 = 3x;$$

$$5) 24x : 4 = 2x;$$

$$6) 5y : y = 4y;$$

$$7) 5x^3 - 5x^3 = 1;$$

$$8) a \cdot 0 = a.$$

Докажите тождество (1.75—1.76).

$$1.75^\circ. 1) -(a + b) = -a - b;$$

$$2) -(a - b) = b - a;$$

$$3) (a - b)c = ac - bc;$$

$$4) (a + b)c = ac + bc.$$

1.76°. 1) $3a - (a + 2b) = 2a - 2b$;

2) $5x - (2y - 5x) = 10x - 2y$;

3) $7a - (2a + 2b) = 5a - 2b$;

4) $10y + (6x - 4y) = 6(x + y)$.

1.77°. Измените перед скобками знак и запишите выражение, тождественно равное данному:

1) $m + (n - y)$; 2) $l - (x - y)$;

3) $x - (m + n)$; 4) $m + (-y - p)$.

1.78°. Запишите тождество, одной из частей которого является выражение:

1) $kp - mp - np$; 2) $am + bm - cm$;

3) $pm - pq - pn + pc$; 4) $ak + am - an + at$.

1.79. Найдите значение выражения:

1) $3(a - 7b) + 2(4a + 3b) - 23(a - b)$ при $a = \frac{1}{3}$,
 $b = -\frac{1}{4}$;

2) $6(x - y) - (3x - y)2 + 4(2y - 3x)$ при $y = -\frac{3}{4}$,
 $x = \frac{5}{12}$;

3) $10,2 - (9xy - 15y) - (-0,3xy + 15y)$ при $x = -1,5$,
 $y = -1,6$;

4) $8,6 + (2,9xy + 12y) - (12y - 29,1xy)$ при $x = -8,4$,
 $y = -\frac{1}{20}$;

5) $\frac{3}{2}y\left(\frac{2}{3}x - 2\right) - 4y\left(2\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}\right) + \frac{1}{3}y(39x - 6)$
при $x = -6,4$, $y = -\frac{5}{32}$;

6) $\frac{3}{2}y\left(\frac{4}{3}x - 2\right) - 6y\left(2\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}\right) + 10y\left(\frac{3}{5}x - \frac{1}{2}\right)$
при $x = -1,5$, $y = 0,2$.

1.80*. При каких значениях x данное равенство обратится в верное числовое равенство:

$$1) \frac{3}{4}(x+2) + \frac{2}{5}(x-1) = \frac{21}{40};$$

$$2) \frac{1}{3}(2x+1) + 2(1-x) = 3\frac{1}{3};$$

$$3) \frac{1}{2}(2-x) + \frac{3}{4}(x-1) = \frac{1}{12};$$

$$4) \frac{1}{4}(3x+1) + 2\left(\frac{1}{2}-x\right) = 2?$$

1.7. Формулы

Пешеход идет со скоростью $5 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$. Если s км — расстояние, пройденное пешеходом за t ч, то

$$s = 5t.$$

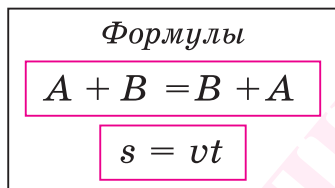


Рис. 17

Левая часть этого равенства содержит переменную s , правая — переменную t , а само равенство выражает **зависимость между переменными** s и t . Такие равенства называют **формулами** (рис. 17).

Распределительный закон умножения относительно сложения выражается равенством

$$(a+b)c = ac + bc.$$

Правило нахождения числа b , равного $p\%$ числа a , записывается так:

$$b = a \cdot \frac{p}{100}.$$

Эти равенства также называют формулами.

Вообще, **формула** — это запись какого-либо утверждения (обычно верного) в виде равенства двух выражений.

Приведем еще несколько примеров формул.

а) Формула $S = ab$ выражает зависимость между переменными S , a и b , где S — площадь прямоугольника, a и b — измерения

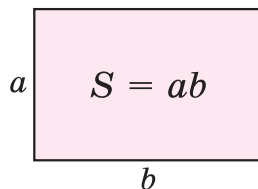


Рис. 18

прямоугольника (рис. 18). Соответственно, формула $S = a \cdot a$, т. е. $S = a^2$, выражает площадь квадрата со стороной a (рис. 19).

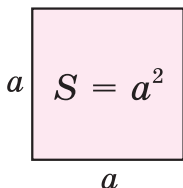


Рис. 19

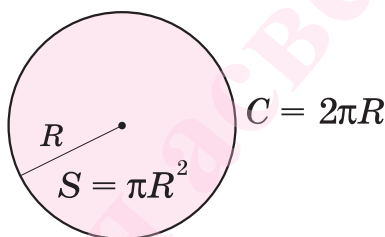


Рис. 20

б) Формулы $C = 2\pi R$ и $S = \pi R^2$ выражают зависимости между переменными C и R , S и R , где C — длина окружности, R — ее радиус, S — площадь круга (рис. 20).

в) Формулой $k = 3p + 2$, где k и p — целые числа, записывают числа k , которые при делении на 3 дают остаток 2.

Формула для целых чисел k , которые при делении на 3 дают остаток 1, будет иметь вид $k = 3p + 1$. А числа, которые кратны трем (т. е. при делении на 3 дают остаток 0), можно записать формулой $k = 3p$, где p — целое число.

г) Тот факт, что x — четное число, можно записать формулой



$x = 2n$, где n — целое число.

А тот факт, что x — нечетное число, записывается формулой



$$x = 2n + 1, \text{ где } n \text{ — целое число,}$$

или же формулой

$$x = 2m - 1, \text{ где } m \text{ — целое число.}$$

д) Формула объема прямоугольного параллелепипеда $V = abc$, где V — объем, a, b, c — измерения параллелепипеда (рис. 21).

Формула $V = a \cdot a \cdot a$, т. е. $V = a^3$, выражает объем куба с ребром a (рис. 22).

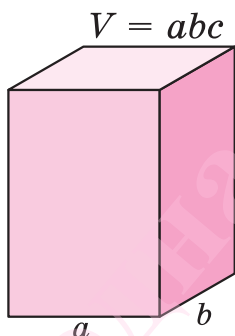


Рис. 21

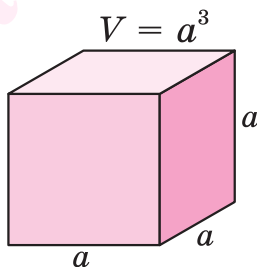


Рис. 22

е) Формула для нахождения числа a , если известно, что b составляет p процентов от этого числа, записывается так:

$$a = \frac{b}{p} \cdot 100.$$

Большое количество формул можно найти в справочниках по физике. Например, сила давления жидкости на дно сосуда площадью S кв. ед. (рис. 23) выражается формулой

$$F = pS,$$

где F — сила, а p — давление на единицу площади дна сосуда.

Заметим, что из формулы $F = pS$ можно выразить переменную p через F и S :

$$p = \frac{F}{S}.$$

Аналогично, переменная S выражается из той же формулы через F и p равенством

$$S = \frac{F}{p}.$$

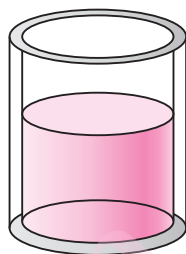


Рис. 23

Пример 1. Из формулы объема прямоугольного параллелепипеда $V = abc$ выразить b через V , a и c и найти значение b при $V = 90 \text{ см}^3$, $a = 3 \text{ см}$, $c = 6 \text{ см}$.

Решение. Разделив обе части равенства $V = abc$ на ac , получим верное числовое равенство $\frac{V}{ac} = b$.

$$\text{Таким образом, } b = \frac{V}{ac} \left| \begin{array}{l} V = 90 \\ a = 3 \\ c = 6 \end{array} \right. = \frac{90}{3 \cdot 6} = 5 \text{ (см)}.$$

$$\text{Ответ: } b = \frac{V}{ac}; b = 5 \text{ см.}$$

Пример 2. Записать формулой утверждение:

а) целое число a кратно 13;

б) при перестановке цифр двузначного числа получается число на 11 больше исходного.

Решение. а) Если число кратно 13, то это означает, что оно делится на 13 без остатка. Таким образом,

$$a = 13n, \text{ где } n \text{ — целое число.}$$

б) Пусть в исходном числе a десятков и b единиц, тогда число, в котором b десятков и a единиц, на 11 больше исходного. Итак,

$$10a + b = 10b + a - 11.$$

Ответ: а) $a = 13n$, где n — целое число;

$$\text{б) } 10a + b = 10b + a - 11.$$



1. Приведите примеры формул, которые выражают зависимость между несколькими переменными.
2. Запишите формулой:
 - а) четные числа; б) нечетные числа; в) числа, кратные 5.
3. Запишите формулу зависимости пути s от времени t и скорости v . Выразите из этой формулы:
 - а) t через s и v ; б) v через s и t .

Упражнения

1.81°. Пусть a , b , c — цифры. Запишите формулу, выражающую число t , состоящее из:

- 1) a десятков, b единиц;
- 2) c тысяч, a сотен, b единиц;
- 3) a тысяч, b десятков, c единиц;
- 4) a тысяч, b десятков.

1.82°. Запишите формулу, выражающую целое число m , равное сумме:

- 1) двух последовательных четных чисел;
- 2) двух последовательных нечетных чисел;
- 3) четного и следующего за ним нечетного числа;
- 4) четного и нечетного чисел;
- 5) трех последовательных целых чисел, первое из которых кратно 3;
- 6) четырех последовательных целых чисел, первое из которых — четное число.

1.83°. 1) Автомобиль за x ч проехал y км со скоростью $p \frac{\text{км}}{\text{ч}}$. Запишите зависимость между x , y и p .

2) За k р. куплено a кг товара по m р. за килограмм. Запишите зависимость между a , m , k .

1.84. Запишите формулу, выражающую натуральное число n , которое:

- 1) при делении на 7 дает остаток 2;
- 2) при делении на 13 дает остаток 10;
- 3) при делении на 2 дает остаток 0 (как называется такое число?);
- 4) при делении на 2 дает остаток 1 (как называется такое число?);
- 5) кратно числу 11;
- 6) кратно числу 9;
- 7) делится нацело на 10;
- 8) делится нацело на p .

1.85. Запишите в виде формулы утверждение:

- 1) при перестановке цифр двузначного числа получится число, вдвое большее исходного;
- 2) при перестановке цифр двузначного числа получится число, меньшее исходного на 36;
- 3) разность между двумя двузначными числами, запись которых отличается порядком цифр, кратна 9;
- 4) при умножении двух чисел a и b ученик в результате получил c , но при вычислении ошибся, уменьшив цифру десятков на 2.

1.86. Запишите формулу, выражающую периметр квадрата P и площадь квадрата S , если его сторона равна:

- 1) $2a + 3$; 2) $6a - 5$.

1.87. Запишите формулу, выражающую площадь поверхности куба S и объем куба V , если его ребро равно:

- 1) $4b - 1$; 2) $2b + 5$.

Глава 2

ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ. ЛИНЕЙНАЯ ФУНКЦИЯ

2.1. Уравнения с одной переменной (с одним неизвестным)

Определение. Равенство, содержащее одну переменную, называется *уравнением с одной переменной*.

Переменную в уравнении называют также *неизвестным*.

Значение переменной (неизвестного), при котором уравнение обращается в верное числовое равенство, называется *корнем* (или *решением*) *уравнения*.

Решить уравнение — это значит найти все его корни или доказать, что их нет.

Например:

а) Уравнение $3x + 2 = 14$ имеет один корень — число 4. Действительно, по сумме 14 и слагаемому 2 единственным образом находится второе слагаемое: $3x = 12$. А по произведению 12 и множителю 3 единственным образом находится второй множитель: $x = 4$.

Еще один пример дан на рисунке 24.

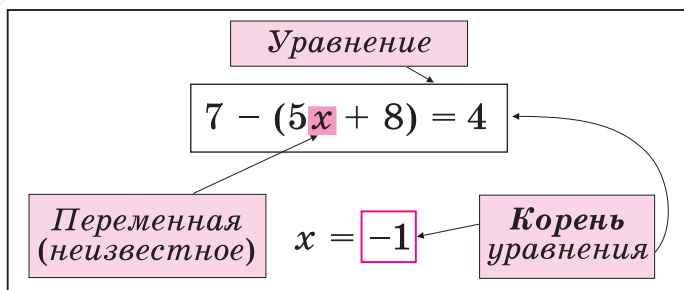


Рис. 24

б) Уравнение $(x - 7)(x + 8) = 0$ имеет два корня — числа 7 и -8 . Действительно, каждое из этих чисел обращает уравнение в верное числовое равенство (проверьте это). А при любом другом значении переменной x ни один из множителей не равен нулю, следовательно, и произведение не равно нулю.

в) Уравнение $x^2 = -1$ не имеет корней, так как его левая часть x^2 — неотрицательное число при любом значении x .

г) Уравнение $5x - 2 \cdot 2,5x = 0$ имеет бесконечно много корней, так как любое число является корнем этого уравнения.

Определение. Два уравнения называются *равносильными*, если каждый корень первого уравнения является корнем второго, и наоборот — каждый корень второго уравнения является корнем первого, т. е. они имеют одни и те же корни.

Равносильными считаются и уравнения, которые не имеют корней.

Например:

а) Уравнения $x + 3 = 4$ и $x + 2 = 3$ равносильны, так как каждое из них имеет один корень 1.

б) Уравнения $x^2 = 1$ и $(x - 1)(x + 1) = 0$ равносильны, так как каждое из них имеет одни и те же корни: 1 и -1 (проверьте это).

в) Уравнения $x^2 + 1 = 0$ и $\frac{1}{x} = 0$ равносильны, так как каждое из них не имеет корней (поясните почему).

Из свойств верных числовых равенств получают свойства уравнений, которые используются при их решении.

Свойство 1. Если в уравнении перенести слагаемое из одной части в другую с противоположным знаком, то получится уравнение, равносильное данному.

Свойство 2. Если обе части уравнения умножить или разделить на одно и то же число, отличное от нуля, то получится уравнение, равносильное данному.

На рисунке 25 приведены примеры использования свойств 1 и 2.

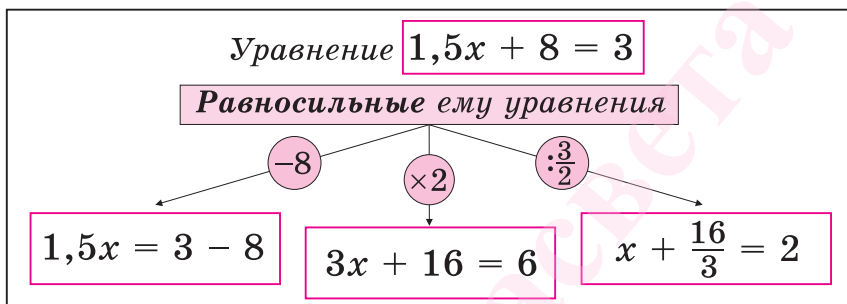


Рис. 25

А

В IX в. узбекский математик и астроном Мухаммед аль-Хорезми написал трактат «Китаб аль-джебр валь-мукабала», где дал общие правила для решения уравнений. Слово «аль-джебр» (восстановление) означало перенос отрицательных членов уравнения из одной его части в другую с изменением знака. От этого слова наука алгебра получила свое название.

Пример 1. Решить уравнение

$$3(x + 1) - 2(x + 2) = 5 - 4(x + 3).$$

Решение. Раскроем скобки в обеих частях уравнения:

$$3x + 3 - 2x - 4 = 5 - 4x - 12.$$

Перенесем все члены уравнения, содержащие x , в левую часть уравнения, а члены, не содержащие x , — в правую:

$$3x - 2x + 4x = 5 - 12 - 3 + 4.$$

Приведем подобные слагаемые в левой части уравнения и вычислим значение его правой части:

$$5x = -6.$$

Найдем неизвестный множитель x :

$$x = \frac{-6}{5}, \text{ т. е. } x = -1\frac{1}{5}.$$

Ответ: $-1\frac{1}{5}$.

Пример 2. Решить уравнение

$$\frac{3x - 7}{4} - \frac{9x + 11}{8} = \frac{3 - x}{2}.$$

Решение. Умножим обе части уравнения на 8; по свойству 2 получим уравнение, равносильное данному:

$$8\left(\frac{3x - 7}{4} - \frac{9x + 11}{8}\right) = 8 \cdot \frac{3 - x}{2};$$
$$2(3x - 7) - (9x + 11) = 4(3 - x).$$

Раскроем скобки:

$$6x - 14 - 9x - 11 = 12 - 4x.$$

Воспользовавшись свойством 1, получим из этого уравнения равносильное ему, в котором все члены, содержащие x , находятся в левой части, а остальные — в правой:

$$6x - 9x + 4x = 12 + 14 + 11.$$

Приведем подобные слагаемые в левой части и найдем значение правой:

$$x = 37.$$

Ответ: 37.



1. Что называется уравнением с одной переменной?
2. Как еще называют переменную в уравнении?
3. Что называется корнем уравнения?
4. Что значит «решить уравнение»?

5. Приведите пример уравнения, у которого:
 - а) единственный корень 5;
 - б) корни -2 , 4 и 12 ;
 - в) нет корней;
 - г) бесконечно много корней;
 - д) любое число является корнем.
6. Какие уравнения называются равносильными?
7. Будут ли равносильными два уравнения, если у них:
 - а) по три корня;
 - б) есть одинаковые корни;
 - в) все корни одного уравнения являются корнями другого;
 - г) нет корней?
8. В результате каких преобразований получается уравнение, равносильное данному?

Упражнения

Определите, равносильны ли уравнения (2.1—2.2).

2.1°. 1) $7x + 3 = 17$ и $14x + 6 = 24$;

2) $3x - 1 = 7$ и $x + 6 = 8$;

3) $8x - 2 = 6$ и $2x + 1 = 3$;

4) $2x + 4 = 11$ и $7x - 3 = 8$;

5) $3x + 1 = 19$ и $\frac{5x - 6}{4} = 6$;

6) $2x - 1 = 3$ и $\frac{x + 3}{3} = 5$;

7) $6x + 3 = 9$ и $6x + 14 = 23$;

8) $12x - 6 = 10$ и $12x - 1 = 15$.

2.2°. 1) $5x - 2x - 3x = 7 - 7$ и $\frac{9x}{9x} = 1$;

2) $4x + 6x + x - 10x = 31 - 30$ и $\frac{2x + 1}{2x + 1} = x$;

3) $x + 2 = 0$ и $x^2 - 4 = 0$;

4) $5 - x = 0$ и $25 - x^2 = 0$;

5) $x + 3 = 3 + x$ и $x + 3 + \frac{1}{x} = 3 + x + \frac{1}{x}$;

6) $4x + 1 = 1 + 4x$ и $1 + 4x + \frac{3}{2} = 4x + 1 + 1,5$;

7) $x + 7 = 8$ и $(x + 7)x = 8x$;

8) $3x - 2 = 6x$ и $\frac{3x - 2}{5} = \frac{6x}{5}$;

9) $x^2 + x = 0$ и $x + 1 = 0$;

10) $16x^2 - x = 0$ и $16x - 1 = 0$.

2.3°. Объясните, почему значения x , равные -2 ; 0 ; 3 и 8 , не являются корнями уравнения:

1) $4 = \frac{25}{x-3}$; 2) $\frac{18}{2+x} = 6$.

2.4. Объясните, почему значения x , равные -2 ; -1 ; 0 и 1 , не являются корнями уравнения:

1) $\frac{8-x}{x(x+1)} = 2$; 2) $\frac{4+x}{(x+2)(x-1)} = 2$.

2.5°. Среди уравнений:

а) $3x + 5 = 3x + 3$;

б) $5 + x = x$;

в) $7(2x + 3) = 14x + 21$;

г) $3(z + 1) = 3z$;

д) $4x + 12 + 2x + 2 - 9 = 6x + 6$;

е) $2x + 5 - x + 3 + 4x = 5x + 8$;

ж) $x^2 + 4 = 0$; з) $16 + x^4 = 0$;

и) $20x = \frac{40x + 3}{2}$; к) $\frac{2}{x+5} = 0$

укажите те, у которых:

1) нет корней;

2) любое число является корнем.

2.6. Является ли число 6 корнем уравнения:

1) $x + 8 = x + 8$;

2) $2 - x = x - 2$;

3) $1 + \frac{1}{x-6} = \frac{1}{x-6} + 1$;

4) $\frac{x^2 - 6x}{6} = x - 6$?

2.7. Какие из чисел -7 ; -2 ; 4 ; 8 являются корнями уравнения:

1) $(2x - 5)(3x + 4) = 12x + 42$;

2) $(20 - 5x)(3x + 7) = 2x - 8$;

3) $(125x - 750)\left(4 - \frac{x}{2}\right) = x^2 - 8x$;

4) $(185 + 15x)\left(\frac{x}{7} + 1\right) = 7x - x^2$?

2.8. Есть ли общий корень у уравнений:

1) $2x + 3 = 5$ и $17x^3 - 15x^2 = x + 1$;

2) $\frac{x+3}{2} = x$ и $2x^2 - 5x = 3$?

Решите уравнение (2.9—2.10).

2.9. 1) $\frac{x}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$;

2) $\frac{x}{5} - \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$;

3) $\frac{4x}{5} - \frac{1}{6} = -3\frac{1}{2}$;

4) $-\frac{3x}{4} + \frac{1}{3} = -4\frac{2}{3}$;

5) $2 - \frac{x}{4} = -1,5$;

6) $1 - \frac{3x}{5} = -3,5$.

2.10. 1) $(3x - 4)5 = 0$;

2) $\frac{3}{2}(2x + 18) = 0$;

3) $(5x + 30)\frac{4}{9} = 0$;

4) $16(8x - 48) = 0$.

2.11°. При каком значении x выражение обращается в нуль:

1) $4x - 14$;

2) $6x + 12$;

3) $5x - 35$;

4) $7x - 21$?

2.12*. Найдите значение a , если известно, что корень уравнения $3ax - 4x + (3x - 8)4 = 5a + 9$ равен:

1) 2 ;

2) -3 ;

3) -8 ;

4) 0 .

2.13. Решите уравнение:

1) $\frac{8-y}{6} - \frac{5-4y}{3} = \frac{y+6}{2};$

2) $\frac{2x+3}{3} - \frac{4-x}{5} = \frac{3x-4}{6};$

3) $\frac{5-2x}{4} + \frac{x+1}{2} = \frac{3-2x}{6};$

4) $\frac{3-5x}{5} + \frac{3x+1}{4} = \frac{9x+1}{2};$

5) $\frac{a-2}{15} - \frac{2a-1}{25} + \frac{3-2a}{3} = \frac{a+2}{5} - \frac{31a+3}{45};$

6) $\frac{5a-2}{14} + \frac{2a-3}{7} - \frac{4-a}{21} = \frac{3a-1}{4} - \frac{5-2a}{3}.$

2.14°. 1) Какое число надо вычесть из 23, чтобы в результате получить 1200?

2) К числу 5,3 прибавили некоторое число и получили в сумме -9,6. Какое число прибавили?

2.15°. 1) К задуманному числу прибавили 13 и получили в сумме -13. Какое число задумано?

2) К задуманному числу прибавили -19 и получили 3. Какое число задумано?

2.2. Линейные уравнения

Начнем с примера.

Пример 1. Решить уравнение:

а) $3x = -2;$ б) $0 \cdot x = 0;$ в) $0 \cdot x = 7.$

Решение. а) Разделив левую и правую части уравнения на 3, на основании свойства 2 из п. 2.1 получим уравнение, равносильное данному: $x = -\frac{2}{3}.$

Корень $-\frac{2}{3}$ — единственный.

б) Подставив вместо x любое число, получим верное числовое равенство $0 = 0$, т. е. корнем уравнения является любое число. Значит, корней бесконечно много.

в) Подставив вместо x любое число, получим неверное числовое равенство $0 = 7$, т. е. никакое число не является корнем этого уравнения. Значит, уравнение корней не имеет.

Ответ: а) $-\frac{2}{3}$; б) x — любое число; в) нет корней.

Определение. *Линейным уравнением с одной переменной (с одним неизвестным) называется уравнение вида*

$$ax = b, \quad (1)$$

где a и b — числа, x — переменная (неизвестное).

Если $a \neq 0$, то уравнение (1) называется *уравнением первой степени*.

▲ Решим это уравнение. Пример 1 подсказывает, что возможны три случая.

1) Пусть $a \neq 0$. Тогда на основании свойства 2 из п. 2.1, разделив обе части уравнения (1) на a , получим равносильное ему уравнение $x = \frac{b}{a}$.

2) Пусть $a = 0$, $b = 0$. В этом случае уравнение (1) имеет вид $0 \cdot x = 0$ и, подставляя вместо x любое число, получаем верное числовое равенство $0 = 0$. Значит, любое число является корнем уравнения (1), т. е. это уравнение имеет бесконечно много корней.

3) Пусть $a = 0$, $b \neq 0$. В этом случае уравнение (1) имеет вид $0 \cdot x = b$ и, подставляя вместо x любое число, получаем неверное числовое равенство $0 = b$. Значит, уравнение (1) корней не имеет.

Все случаи решения сведены в таблицу.

a	$a \neq 0$	0	0
b	любое	$b \neq 0$	0
Решение уравнения $ax = b$	$x = \frac{b}{a}$	Корней нет	x — любое число
Число корней уравнения $ax = b$	1	0	Бесконечно много



А

В 1637 г. французский математик Р. Декарт впервые предложил известные числа обозначать первыми буквами латинского алфавита — $a, b, c, \dots$, а неизвестные, например в уравнениях, — последними буквами латинского алфавита — x, y, z .

Пример 2. Решить уравнение

$$\frac{5x}{2} = 19 - \frac{2x}{3}.$$

Решение. Воспользуемся свойством 2 из п. 2.1 и умножим обе части уравнения на 6:

$$6 \cdot \frac{5x}{2} = 6 \left(19 - \frac{2x}{3} \right),$$

$$3 \cdot 5x = 6 \cdot 19 - 2 \cdot 2x,$$

$$15x = 6 \cdot 19 - 4x.$$

Воспользуемся свойством 1 из п. 2.1 и, перенеся слагаемое $-4x$ в левую часть с противоположным знаком, получим равносильное данному уравнение $15x + 4x = 6 \cdot 19$, откуда

$$19x = 6 \cdot 19.$$

На основании свойства 2 из п. 2.1, разделив обе части уравнения на 19, получим $x = 6$.

Ответ: 6.

Пример 3. Решить уравнение

$$3(x + 1) - x + 8 = 2x + 5.$$

Решение. Раскрыв скобки, получим:

$$3x + 3 - x + 8 = 2x + 5.$$

По свойству 1 из п. 2.1 это уравнение равносильно уравнению

$$3x - x - 2x = 5 - 8 - 3,$$

откуда

$$(3 - 1 - 2)x = -6.$$

Уравнение $0 \cdot x = -6$ корней не имеет.

Ответ: нет корней.

Пример 4. Решить уравнение

$$11x + 3(x - 8) + 4 = 2(7x - 2 \cdot 5).$$

Решение. Раскроем скобки и решим уравнение:

$$11x + 3x - 24 + 4 = 14x - 20,$$

$$11x + 3x - 14x = 24 - 4 - 20,$$

$$(11 + 3 - 14)x = 0,$$

$$0 \cdot x = 0,$$

x — любое число.

Ответ: любое число.

Рассмотрим несколько уравнений, решение которых сводится к решению линейных уравнений.

Пример 5. Решить уравнение:

$$\text{а) } |y| = 7; \quad \text{б)* } |y - 3| = 2.$$

Решение. а) Значение переменной y является корнем уравнения $|y| = 7$, если оно является корнем хотя бы одного из двух уравнений:

$$y = -7 \text{ или } y = 7.$$

Таким образом, данное уравнение имеет два корня: -7 и 7 .

▲ б) Значение переменной y является корнем уравнения $|y - 3| = 2$, если оно является корнем хотя бы одного из двух уравнений:

$$y - 3 = -2 \text{ или } y - 3 = 2.$$

Таким образом, получим:

$$y = 3 - 2 \text{ или } y = 3 + 2;$$

$$y = 1 \text{ или } y = 5.$$

Ответ: а) ± 7 ; б) 1; 5. ▲

Пример 6. Решить уравнение

$$(t - 1)(t + 2)(3 - t) = 0.$$

Решение. Из условия равенства произведения нулю следует, что значение переменной t будет корнем данного уравнения тогда и только тогда, когда значение t будет корнем хотя бы одного из трех уравнений:

$$t - 1 = 0 \text{ или } t + 2 = 0 \text{ или } 3 - t = 0.$$

Решив эти уравнения, получим:

$$t = 1 \text{ или } t = -2 \text{ или } t = 3.$$

Ответ: -2 ; 1; 3.

А

Уже в древних египетских папирусах (ок. 1900 г. до н. э.) встречались задачи, которые сводились к решению линейных уравнений с одним неизвестным. Например: «Есть некое количество. Его $\frac{2}{3}$, его $\frac{1}{2}$ и его $\frac{1}{7}$, сложенные вместе, дают 55. Каково это количество?»

Для неизвестного в уравнении существовал иероглиф, обозначающий кучу и произносившийся «хау». Поэтому египетскую алгебру иногда называют «хау-исчислением».



1. Какое уравнение называется линейным уравнением с одной переменной (с одним неизвестным)?
2. Является ли линейным уравнение:
а) $2|x| = 3$; б) $(x - 3)(x + 1) = 4$; в) $-3 = 7x$?
- 3*. Как решается линейное уравнение $ax = b$ при:
а) $a \neq 0$; б) $a = b = 0$; в) $a = 0, b \neq 0$?

Упражнения

Решите уравнение (2.16—2.18).

2.16°. 1) $5x + (3x + 2) = (4x - 8) + x + 20$;

2) $6x - (3 - 2x) = (3x + 4) + 5x - 1$;

3) $2x - 7,1 + x = (6x + 6,9) + 4x$;

4) $x + 3,8 - 3x = (4x - 7,2) + 5x$;

5) $\frac{5x+1}{3} - \frac{20x+1}{5} = \frac{8-5x}{6}$;

6) $\frac{3x+5}{3} - \frac{x-4}{6} = \frac{x}{2}$;

7) $\frac{5(9x+7)}{9} - 4 = \frac{9x+1}{3}$;

8) $\frac{2(3x-1)}{3} - 1 = \frac{3x+2}{10}$;

9) $3x - 11 - \frac{2x-9}{2} = \frac{x-2}{3}$;

10) $4x - 11 + \frac{7x+1}{2} = \frac{x+9}{5}$.

2.17°. 1) $(y - 4)(y + 8) = 0$;

2) $(y + 1)(y + 5) = 0$;

3) $(6y + 24)(42 - 7y) = 0$;

4) $(13 + 26y)(75 - 25y) = 0$;

5) $(y + 3)(y + 4)(y - 9) = 0$;

6) $(y - 12)(y - 7)(y + 10) = 0$;

7) $(2y + 18)(3y - 27)(49 - 7y) = 0$;

8) $(4y + 36)(64 - 8y)(9y + 81) = 0$.

- 2.18.** 1) $3(2x - 1) = 5(x - 3) - 6(3x - 4) + 102$;
2) $4(x + 2) = 7(2x - 1) - 9(3x - 4) + 30$;
3) $8(7 - 4k) = 7(4k + 1) - 5(8k - 1) + 19$;
4) $3(2y + 1) = 5(12y - 7) - 7(6y - 1) + 23$;
5) $0,2y + 0,5y + 5(5y - 1) = 2,7y + 6,5$;
6) $0,3(0,4y - 1,2) = -0,36y + 3,096$;
7) $0,6(y - 0,6) = -0,8(y - 0,4) + 1$;
8) $1,3(y - 0,7) - 0,12(y + 10) = 5y - 9,75$.

2.19°. При каком значении переменной t будет равным 18 значение выражения:

- 1) $12t - 18$; 2) $24 - 16t$?

2.20°. При каком значении переменной k :

- 1) значения выражений $20k - 1$ и $19 + 18k$ равны;
2) значение выражения $5 - 6k$ на 5 больше значения выражения $4 + 2k$;
3) значение выражения $4k + 6$ на 18 меньше значения выражения $3k - 9$;
4) значение выражения $2k - 10$ равно удвоенному значению выражения $4k$?

Решите уравнение (2.21—2.23).

- 2.21.** 1) $|x| = 15$; 2) $|x| = 27$;
3) $|x| = 0$; 4) $|x| = -3$;
5)* $|x + 7| = 4$; 6)* $|x + 5| = 6$;
7)* $|3 - 2x| = 1$; 8)* $|4 - 3x| = 2$.

- 2.22.** 1) $35 - 6x + 9 = 11x - 10x + 23 - 7x$;
2) $15 - 39x = -7x + 34 - 26x + 47 - 6x$;
3) $3x^2 - 12x + 7 = (27x^2 + 15x - 19) - 24x^2 - (5x - 10)$;
4) $8x^2 + 14x - 18 = (13x^2 + 8x + 1) - (-6x + 19) - 5x^2$;

$$5) 0,7\left(2x + \frac{3}{7}\right) - \frac{2}{5}(0,4 - 3x) + \frac{1}{35}(28 - 21x) = 4,94;$$

$$6) 2\frac{1}{3} - 3\frac{5}{6}(2 - 3x) = 8\frac{5}{9} + 4\frac{7}{12}\left(-1\frac{1}{3} + 2x\right).$$

$$2.23*. 1) \frac{x-2}{x+5} = \frac{3}{4}; \quad 2) \frac{x+7}{x-1} = \frac{2}{1};$$

$$3) \frac{x-3}{x-7} = \frac{6}{5}; \quad 4) \frac{x+1}{x+3} = \frac{5}{6};$$

$$5) \frac{2x-1}{x+2} = \frac{2}{3}; \quad 6) \frac{x-2}{3x+1} = \frac{2}{5};$$

$$7) \frac{2}{x-7} = \frac{3}{x+4}; \quad 8) \frac{5}{x-3} = \frac{2}{3}.$$

2.24*. Найдите значение переменной x , при котором верно равенство:

$$1) \frac{3x+1,96}{5\frac{7}{48} - 4\frac{31}{32}} = \frac{24}{17};$$

$$2) \frac{x\left(3\frac{5}{24} - 2\frac{7}{30}\right)}{10,5 \cdot 0,24 - 2,1} = 1\frac{11}{15} \cdot \frac{3}{8};$$

$$3) \frac{(2x+12,375)1\frac{4}{5}}{6,734 : 1,3 - 1,25} = 7,5;$$

$$4) \frac{5\frac{7}{18} - 4\frac{23}{30}}{1,12 \cdot 1\frac{1}{9}} = \frac{x}{3,2 + 0,8\left(5\frac{1}{2} - 3,25\right)};$$

$$5) \frac{\left(13\frac{5}{12} - 0,4x\right)4\frac{13}{36}}{5\frac{7}{24} - 3\frac{1}{9}} = \frac{8}{9}x + 24,3;$$

$$6) \frac{2\frac{1}{2}x - 2\frac{7}{24} : \left(\frac{5}{8} - 1\frac{1}{12}\right)}{135 \cdot 0,01 + 0,065 \cdot 10} = 0,02x - 6,05 : 2,5.$$

2.25*. Решите уравнение с переменной x :

1) $(m - 1)x = 5$;

2) $4x = m$;

3) $(m - 2)(m + 4)x = m - 2$;

4) $(m - 1)x = m + 2$.

2.26*. Решите уравнение с переменной x :

1) $|x| = a$; 2) $|x| = -a$.

2.3. Решение задач с помощью уравнений

При решении задач с помощью уравнений неизвестную величину, значение которой нужно определить, обозначают буквой. Затем, используя эту букву и имеющиеся в задаче данные, составляют два выражения для вычисления значений одной и той же величины. Введенную букву в этих выражениях объявляют переменной, а сами выражения соединяют знаком равенства, получая таким образом уравнение с этой переменной.

Рассмотрим решение нескольких задач.

Пример 1. На двух полках 100 книг. С первой полки 8 книг переставили на вторую, после чего число книг на первой полке стало в два раза меньше числа книг на второй полке. Сколько книг было на первой полке первоначально?

Решение. Пусть сначала на первой полке было x книг, тогда на второй полке было $(100 - x)$ книг. После того как с первой полки на вторую переставили 8 книг, на первой полке стало $(x - 8)$ книг, а на второй полке стало $(100 - x + 8)$ книг. Так как по условию число книг на второй полке стало в 2 раза больше, чем на первой, то получаем уравнение

$$100 - x + 8 = 2(x - 8).$$

Решим это уравнение:

$$108 - x = 2x - 16,$$

$$108 + 16 = 2x + x,$$

$$3x = 124,$$

$$x = 41\frac{1}{3}.$$

Проверим соответствие найденного корня смыслу задачи. Значение $41\frac{1}{3}$ не является решением задачи — оно не соответствует ее смыслу, поскольку число книг должно быть целым.

Ответ: нет решения.

Таким образом, в решении задачи с помощью уравнения можно выделить следующие этапы:

- составление уравнения;
- решение составленного уравнения;
- возможные дополнительные вычисления (в случае необходимости);
- проверка соответствия полученного решения смыслу задачи;
- ответ на вопрос задачи.

Пример 2. Поезд должен пройти расстояние от пункта A до пункта B за 8 ч 45 мин. Если он уменьшит скорость на $12 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$, то придет в пункт B на 1 ч 45 мин позже, чем должен прийти по расписанию. Найти запланированную скорость поезда и расстояние между пунктами A и B .

Решение. Пусть скорость поезда по плану $v \frac{\text{км}}{\text{ч}}$, тогда уменьшенная скорость $(v - 12) \frac{\text{км}}{\text{ч}}$. С этой скоростью поезд будет в пути 8 ч 45 мин да еще 1 ч 45 мин, т. е. $10\frac{1}{2}$ ч. Значит, расстояние AB равно $(v - 12)10\frac{1}{2}$ км.

Но по условию это же расстояние AB равно $8\frac{3}{4}v$ км, поскольку $8 \text{ ч } 45 \text{ мин} = 8\frac{45}{60} \text{ ч} = 8\frac{3}{4} \text{ ч}$.

Таким образом, получим уравнение:

$$8\frac{3}{4}v = (v - 12)10\frac{1}{2}.$$

Решим это уравнение. Умножив обе части уравнения на 4, получим уравнение $35v = 42(v - 12)$, равносильное исходному.

Разделим обе части уравнения на 7, раскроем скобки и решим полученное уравнение:

$$\begin{aligned} 5v &= 6v - 72, \\ v &= 72. \end{aligned}$$

Дополнительные вычисления. Если скорость поезда по расписанию $72 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$, то уменьшенная скорость будет $(72 - 12) \frac{\text{км}}{\text{ч}}$, т. е. $60 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$, а весь путь составит $(72 \cdot 8\frac{3}{4})$ км, т. е. 630 км.

Найденные скорость и расстояние соответствуют смыслу задачи.

Ответ: $72 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$; 630 км.

А

При решении различных задач уравнения начали применять еще в Древнем Египте и Древнем Вавилоне во II тысячелетии до н. э. Буквы при этом не использовались, а приводились решения «типовых задач», из которых решения аналогичных задач получали заменой числовых данных.

Пример 3. В двузначном числе цифра единиц на 3 больше цифры десятков. Когда цифру десятков увеличили в два раза и поменяли местами с цифрой единиц, то новое число стало на 39 больше исходного. Найти исходное число.

Решение. Пусть x — цифра десятков исходного числа, тогда цифра единиц $x + 3$ и исходное число равно $10x + x + 3$, т. е. $11x + 3$. В новом числе $x + 3$ — цифра десятков, а $2x$ — цифра единиц, значит, это число равно $10(x + 3) + 2x$, т. е. $12x + 30$. Так как по условию разность между новым и исходным числом равна 39, то получим уравнение

$$(12x + 30) - (11x + 3) = 39.$$

Решим его:

$$\begin{aligned} 12x - 11x &= 39 - 30 + 3, \\ x &= 12. \end{aligned}$$

По условию задачи значениями x может быть лишь одно из чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, так как буквой x обозначена цифра (поясните, почему $x \neq 0$). Таким образом, решение $x = 12$ не соответствует смыслу задачи.

Ответ: задача не имеет решений.

Замечание. Если решение соответствует смыслу задачи, то при желании можно еще проверить и правильность вычислений. Так, в примере 2: если скорость поезда $60 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$, то он будет в пути $630 : 60 = 10 \frac{1}{2}$ (ч) и придет в пункт B позже, чем должен прийти по расписанию, на $\left(10 \frac{1}{2} - 8 \frac{3}{4}\right)$ ч, т. е. на $1 \frac{3}{4}$ ч. Значит, опоздание составит 1 ч 45 мин, что соответствует условию задачи. Задача решена верно.

Такую проверку записывать в тетради не нужно.



1. Обязательно ли при решении задачи составлять уравнение?
2. Какие этапы выделяют при решении задачи с помощью уравнения?

Упражнения

- 2.27.** 1) На первой полке книг в три раза меньше, чем на второй. Если с первой полки взять 7 книг, а на вторую поставить 9, то книг на первой полке будет в 5 раз меньше, чем на второй. Сколько книг было на каждой полке первоначально?
- 2) Первый кусок ситца вдвое больше, чем второй. Если от каждого из них отрезать по 13 м, то в первом куске будет в 2,5 раза больше ткани, чем во втором. Сколько метров ситца было первоначально в каждом куске?
- 3) У Димы было 64 диска, а у Саши 50 дисков. После того как Дима подарил Саше несколько дисков, у них стало дисков поровну. Сколько дисков Дима подарил Саше?
- 4) На первой полке лежало 88 журналов, а на второй — 72 журнала. После того как Маша переложила с первой полки на вторую несколько журналов, их стало поровну. Сколько журналов переложила Маша?
- 2.28.** 1) Представьте число 220 в виде двух слагаемых так, чтобы частное от деления одного из них на 4 было равно частному от деления другого на 7.
- 2) Число 123 представьте в виде суммы двух слагаемых так, чтобы частное от деления одного из них на 2 равнялось произведению другого на 20.
- 2.29.** 1) Одно число больше другого на 51; если его разделить на другое, то в частном получится 2 и в остатке 8. Найдите эти числа.
- 2) Одно число меньше другого на 123; если одно из этих чисел разделить на другое, то в частном получится 5 и в остатке 7. Найдите эти числа.

- 3) Одно число больше другого на 10. Найдите эти числа, зная, что их сумма равна 80.
- 4) Одно число меньше другого на 15. Найдите эти числа, зная, что их сумма равна 83.
- 2.30.** 1) Разность между наибольшим трехзначным числом и задуманным в 5 раз больше разности между задуманным числом и наибольшим двузначным. Найдите задуманное число.
- 2) Сумма задуманного числа и наибольшего двузначного числа в 2 раза меньше суммы задуманного числа и наибольшего трехзначного числа. Найдите задуманное число.
- 2.31.** 1) Матери 42 года, а дочери — 23. Сколько лет назад дочь была в два раза моложе матери?
- 2) Отцу 30 лет, а сыну — 8. Через сколько лет отец будет в 3 раза старше сына?
- 2.32.** 1) Два поезда идут навстречу друг другу с двух станций, расстояние между которыми 473 км. Первый поезд вышел на 1 ч 40 мин раньше второго и идет со скоростью $63 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$; второй поезд идет со скоростью $52 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$. Через какое время они встретятся?
- 2) Два велосипедиста выехали одновременно из двух городов, находящихся на расстоянии 72 км один от другого, и едут навстречу друг другу. Первый проезжает в час 16 км, а второй — 20 км. Через какое время они встретятся?
- 3) Катер прошел по озеру на 5 км больше, чем по реке против течения, затратив на путь по реке на 15 мин больше, чем на путь по озеру. Найдите расстояние, которое катер прошел

против течения реки со скоростью $8 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$, если его собственная скорость $10 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$.

4) Лодочник проплыл против течения на 2 км меньше, чем по течению, затратив на путь против течения на 10 мин меньше, чем на путь по течению. Найдите расстояние, которое проплыл лодочник по течению, если его скорость по течению $4 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$, а против течения — $3 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$.

2.33. 1) Отряд туристов, подойдя к реке, рассчитал, что если посадить в каждую лодку по 6 человек, то трое останутся без места, а если в каждую лодку посадить по 7 человек, то одно место будет свободным. Сколько было туристов и лодок?

2) Для перевозки некоторого количества контейнеров были заказаны грузовые машины. Оказалось, что если погрузить на каждую машину по 9 контейнеров, то 4 контейнера останутся без места, если же на каждую машину погрузить по 12 контейнеров, то 5 мест будут свободными. Сколько было контейнеров и сколько заказали машин?

2.34. 1) На расстоянии AB заднее колесо трактора сделало на 40 оборотов меньше переднего. Длины окружностей этих колес 2,5 м и 2 м. Найдите AB .

2) Длина окружности переднего колеса трактора 1,4 м, заднего — 1,8 м. На каком расстоянии переднее колесо сделает на 100 оборотов больше заднего?

2.35. 1) Знаменатель несократимой дроби на 4 больше числителя. Если от ее числителя и зна-

менателя отнять 3, то получится $\frac{1}{3}$. Найдите эту дробь.

2) Числитель несократимой дроби меньше знаменателя на 1. Если числитель увеличить на 5, а знаменатель уменьшить на 5, то получится 4. Найдите эту дробь.

2.36. 1) Для оклейки верхнего края обоев в зале понадобилось 36 м бордюра. Найдите объем зала, если его длина в 2,6 раза больше ширины, а высота составляет $\frac{3}{5}$ ширины.

2) Дно аквариума имеет форму прямоугольника, периметр которого 20 дм. Длина прямоугольника в 1,5 раза больше ширины. Найдите высоту аквариума, если его объем равен 72 дм^3 .

2.37. 1) Две пчелиные семьи собрали за летний сезон 130 кг меда. В одной семье было в 1,5 раза больше рабочих пчел, чем в другой. Сколько рабочих пчел было в каждой пчелиной семье, если одна рабочая пчела собирает за летний сезон 2 г меда?

2) Папа с мамой собрали в полтора раза больше грибов, чем их трое детей. Сколько грибов собрал каждый ребенок, если все дети собрали поровну, а вся семья собрала 30 кг грибов?

3) Мастер за три дня собрал 48 компьютеров, причем количество компьютеров, собранных за первый, второй и третий день, пропорционально числам 5, 4 и 3. Сколько компьютеров он собрал за первые два дня?

4) Велотуристы за три дня проехали 108 км, причем расстояния, которые они преодолева-

ли за первый, второй и третий день, пропорциональны числам 4, 3 и 2. Сколько километров они проехали за последние два дня?

2.4. Понятие функции

Начнем с двух примеров.

Пример 1. Автомобиль едет из города A в город B , расстояние между которыми 400 км, с постоянной скоростью $80 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$. На каком расстоянии s км от города B будет автомобиль через t ч?

Очевидно, что ответ к этой задаче можно записать в виде формулы

$$s = 400 - 80t. \quad (1)$$

В этой формуле t и s — переменные. Значение переменной s меняется, подчиняясь закону движения, выраженному формулой (1). Согласно этому закону каждому значению t из области определения выражения $400 - 80t$ ставится в соответствие одно определенное значение s . Например:

при $t = 1$ значение $s = 400 - 80 \cdot 1 = 320$;

при $t = 1,5$ значение $s = 400 - 80 \cdot 1,5 = 280$.

По смыслу задачи значение переменной t неотрицательно и не может быть больше времени движения автомобиля от A до B , т. е. пяти часов. Значит, $t \geq 0$ и $t \leq 5$.

Пример 2. Пусть длина прямоугольника x м, а ширина — на 3 м меньше. Чему равна площадь y (м^2) прямоугольника?

Понятно, что решение этой задачи приводит к формуле

$$y = x(x - 3). \quad (2)$$

Формула (2) указывает правило вычисления площади y прямоугольника по значению его стороны x .

Например,

если $x = 7$, то $y = 7(7 - 3) = 28$;

если $x = 13$, то $y = 13(13 - 3) = 130$.

По смыслу задачи значение x может быть любым числом из множества чисел, больших 3. Рассматривая в формуле (2) буквы x и y как переменные, заметим, что каждому значению $x > 3$ соответствует единственное значение y .

В каждом из примеров 1 и 2 был указан закон (правило), по которому для заданного значения одной переменной из некоторого множества чисел можно найти соответствующее ему значение другой переменной.

Определение. Закон (правило), по которому каждому значению x из некоторого множества чисел D ставится в соответствие одно определенное число y , называется *функцией, заданной на этом множестве D* .

При этом x называется *независимой переменной* или *аргументом*, y — *зависимой переменной* или *функцией*, а множество D — *областью определения функции*.

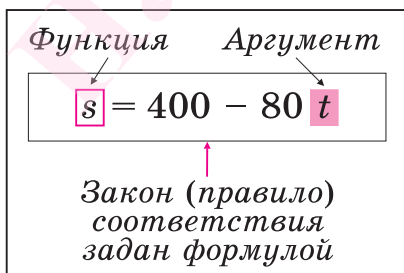


Рис. 26

Разумеется, вместо букв x и y можно было использовать и другие буквы. Так, в примере 1 независимая переменная (аргумент) обозначена буквой t , а зависимая переменная (функция) — буквой s (рис. 26).

Рассмотренные примеры показывают, как функция может быть задана формулой.

А

Выражать зависимость между переменными при помощи формулы впервые стали французские математики Рене Декарт и Пьер Ферма (XVII в.).

Другие способы задания функции будут рассмотрены в 9-м классе.

?

1. Что называется функцией, заданной на множестве D ?
2. Приведите примеры функций, заданных формулами.
3. Как для функции $y = 3x^3 - 4$ по значениям аргумента $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$ найти соответствующие значения функции y_1 , y_2 , y_3 ?

Упражнения

2.38°. Для функции, заданной формулой, назовите независимую и зависимую переменные:

- | | |
|----------------------------|---------------------------|
| 1) $m = 5k^2 + 4$; | 2) $p = -3q^3 - 2$; |
| 3) $t = -4(v + 5)^2 - 1$; | 4) $l = 7(n + 8)^2 - 9$; |
| 5) $q = 3a^4 - a + 2$; | 6) $h = 4b^5 + b^2 - 3$. |

2.39. Для функции, заданной формулой в упражнении **2.38°**, каждому из значений аргумента -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 найдите соответствующее значение функции.

2.40. Заполните таблицу, перечертив ее в тетрадь, значениями функции y , заданной формулой:

- | | |
|-----------------------|-----------------------|
| 1) $y = 7,5 - 2x$; | 2) $y = 3,9 + 4x$; |
| 3) $y = -3,4 + x^2$; | 4) $y = -2,7 - x^2$; |

$$5) y = 2(x^3 - 3)^2 + 1; \quad 6) y = 5 - (2x^3 + 1)^2.$$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y							

2.5. Функция $y = kx$

Рассмотрим функцию, заданную формулой

$$y = kx, \quad (1)$$

где k — некоторое число.

Здесь независимая переменная x (аргумент) может принимать любые значения.

Из курса 6-го класса мы знаем, что при $k \neq 0$ величины, связанные формулой (1), прямо пропорциональны.

Определение. Функция $y = kx$ ($k \neq 0$) называется *прямой пропорциональностью*; ее область определения состоит из всех чисел.

Переменная y называется *прямо пропорциональной переменной x* (слово «прямо» часто опускается), а число k — *коэффициентом прямой пропорциональности*.

Теорема. Если переменная y пропорциональна переменной x с коэффициентом k , то переменная x пропорциональна переменной y с коэффициентом $\frac{1}{k}$.

Доказательство. Переменная y пропорциональна переменной x с коэффициентом k , т. е. $y = kx$ ($k \neq 0$). Тогда

$$x = \frac{1}{k} \cdot y,$$

а это означает, что переменная x пропорциональна переменной y с коэффициентом $\frac{1}{k}$. $\square$

Замечание. Доказанная теорема позволяет говорить, что *переменные x и y (или y и x) пропорциональны*.



Прямая пропорциональность переменных x и y означает, что их отношение постоянно, т. е. зависимость между ними при $x \neq 0$ выражена формулой $\frac{y}{x} = k$ ($k \neq 0$).

Поэтому, зная для какого-нибудь значения аргумента $x_1 \neq 0$ значение функции y_1 , можно найти коэффициент пропорциональности $k = \frac{y_1}{x_1}$.

Пример 1. Переменные a и b пропорциональны; a_1, a_2 и b_1, b_2 — их соответствующие значения. Найти b_1 , зная, что $a_1 = 37$, $a_2 = 111$ и $b_2 = 17$.

Решение. Пусть $b = ka$, тогда $k = \frac{b_2}{a_2} = \frac{17}{111}$, значит, $b = \frac{17}{111}a$, откуда $b_1 = k \cdot a_1 = \frac{17}{111} \cdot 37 = 5\frac{2}{3}$.

Ответ: $b_1 = 5\frac{2}{3}$.

Рассмотрим функцию

$$y = 2x.$$

Чтобы построить ее график, придадим несколько значений аргументу x и вычислим соответствующие значения функции (результаты даны в таблице).

x	-2	-1	0	1	2	3
y	-4	-2	0	2	4	6

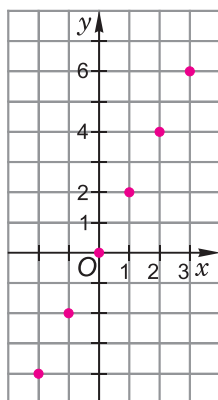


Рис. 27

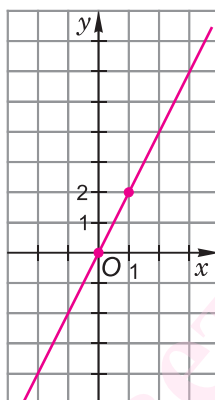


Рис. 28

Изобразим точки $(x; y)$ с указанными координатами на плоскости (рис. 27). Легко увидеть, что все они лежат на одной прямой, проходящей через начало координат. Для этого достаточно приложить к этим точкам линейку.

Так как прямая определяется двумя точками, лежащими на ней, то мы можем сказать, что графиком функции $y = 2x$ является прямая, проходящая через начало координат и точку $(1; 2)$ (рис. 28). Конечно, вместо точки $(1; 2)$ можно указать любую другую точку на этой прямой.

Если тем же способом изобразить графики функций $y = kx$ при значениях k , равных $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; 3; 4, и при значениях k , равных -4 ; -3 ; -2 ; $-\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{3}$, то легко убедиться, что каждый из этих графиков является прямой, проходящей через начало координат (рис. 29, 30).

Итак,



графиком прямой пропорциональности $y = kx$ ($k \neq 0$) является прямая, проходящая через начало координат. Ее называют *прямой $y = kx$* .

Заметим, что графиком прямой пропорциональности $y = kx$ ($k \neq 0$) может быть любая прямая, проходящая через начало координат, кроме осей координат.

При $k = 0$ функция $y = kx$ имеет вид $y = 0$. Нам известно, что все точки плоскости, ординаты которых равны нулю, лежат на оси Ox , т. е. при $k = 0$ графиком функции $y = kx$ является прямая, совпадающая с осью Ox .

Глядя на рисунки 29 и 30, можно убедиться, что при положительном коэффициенте k график прямой пропорциональности $y = kx$ расположен в I и III координатных углах (координатных четвертях), а при отрицательном коэффициенте k — во II и IV координатных углах (координатных четвертях).

Коэффициентом k определяется также угол, образованный в верхней полуплоскости прямой $y = kx$ и полупрямой Ox . Коэффициент k называется **угловым коэффициентом** прямой $y = kx$ (подробнее об этом вы узнаете в 10-м классе).

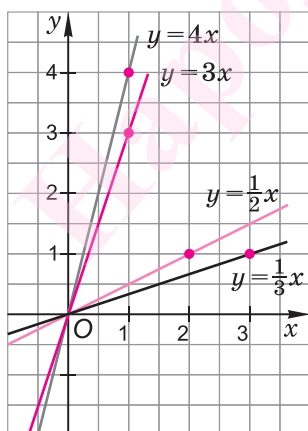


Рис. 29

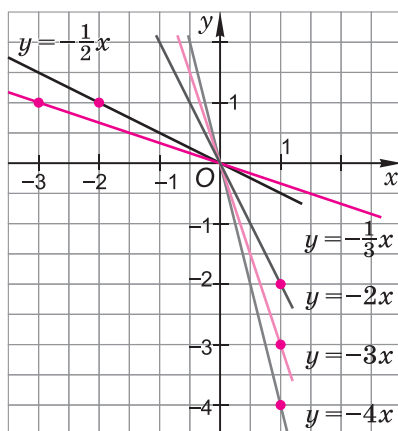


Рис. 30

Обратите внимание:



график функции состоит из всех тех точек координатной плоскости, координаты которых — соответствующие друг другу значения аргумента и функции.

Пример 2. Принадлежит ли графику функции $y = -0,7x$ точка:

- а) $A(-10; 7)$; б) $B(6; 5)$?

Решение. а) Подставив в формулу $y = -0,7x$ координаты точки A , получим

$$7 = -0,7(-10).$$

Это верное числовое равенство; значит, координаты точки A — соответствующие друг другу значения аргумента и функции. Следовательно, точка A принадлежит графику функции $y = -0,7x$.

б) Подставив в формулу $y = -0,7x$ координаты точки B , получим

$$-5 = -0,7 \cdot 6.$$

Это неверное числовое равенство. Следовательно, точка B не принадлежит графику функции $y = -0,7x$.



1. Какая функция называется прямой пропорциональностью?
2. В каком случае переменная y называется прямо пропорциональной переменной x ?
3. Как называется число k в формуле $y = kx$, если $k \neq 0$?
4. Пропорциональны ли переменные x и y , если пропорциональны переменные y и x ?
5. Что означает пропорциональность переменных x и y ?
6. Что является графиком прямой пропорциональности?

Упражнения

- 2.41. Верно ли, что прямо пропорциональны:
- 1) периметр квадрата и его сторона;
 - 2) площадь квадрата и его сторона;
 - 3) длина окружности и ее радиус;
 - 4) сумма чисел и одно из слагаемых;
 - 5) делимое и частное, если делитель постоянный;
 - 6) возраст человека и его масса;
 - 7) высота и объем прямоугольного параллелепипеда, если площадь основания постоянна;
 - 8) пройденный путь и время при постоянной скорости;
 - 9) число и 30 % этого числа;
 - 10) длина отрезка, измеренная в сантиметрах, и длина этого отрезка, измеренная в метрах?
- 2.42. Зависимость между переменными s и t выражается формулой $s = 75t - 126$. Являются ли переменные t и s прямо пропорциональными?
- 2.43°. Известно, что переменная a прямо пропорциональна переменной b . Что нужно знать, чтобы по заданному значению b найти соответствующее значение a ?
- 2.44°. Из 24 кг молока получается 3 кг сливок. Сколько килограммов молока нужно для приготовления 6 кг сливок, 12 кг, 15 кг, 24 кг? Составьте формулу, выражающую зависимость между массой молока (m) и массой сливок (l).
- 2.45. Площадь треугольника выражается формулой $S = \frac{1}{2}ah$, где a — основание треугольника, h — высота. Верно ли, что:

- 1) при фиксированной высоте h площадь S и основание a прямо пропорциональны;
- 2) при фиксированном основании a площадь S и высота h прямо пропорциональны;
- 3) при фиксированной площади S основание a и высота h прямо пропорциональны?

2.46. Используя данные таблицы, задайте прямую пропорциональность формулой. Заполните таблицу, перечертив ее в тетрадь.

1)

x	0	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	2	$2\frac{2}{3}$	$4\frac{7}{9}$
y		0,5						

2)

x	-3	-2,5	-2	-1,5	-1	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{8}$	0
y						0,8		

2.47°. Функция задана формулой $y = -\frac{2}{5}x$.

1) Найдите значение функции, если соответствующее значение аргумента равно -5 ; -1 ; $-\frac{1}{5}$; 0 ; $\frac{5}{2}$; 4 ; 5 ; 10 .

2) По значению функции -6 ; -4 ; 0 ; 1 ; $1,5$; 2 ; $2,5$; 8 найдите соответствующее значение аргумента.



2.48. Число 60 представьте в виде двух слагаемых, отношение которых равно:

- 1) $1 : 2$; 2) $2 : 3$; 3) $3 : 1$; 4) $9 : 11$.



2.49. Отрезок длиной 90 см разделили на две части. Найдите длины полученных отрезков, если их отношение равно:

- 1) $3 : 2$; 2) $1 : 4$; 3) $5 : 4$; 4) $7 : 3$.



2.50. Пятна от молока и супа на белых тканях можно вывести смесью, состоящей из 6 частей мыла, 1 части нашатырного спирта и 2 частей скипидара. Сколько надо взять каждого из этих веществ, чтобы приготовить 252 г смеси?



2.51. Пятна на цветных шерстяных и шелковых тканях можно вывести смесью, состоящей из 15 частей глицерина, 2 частей нашатырного спирта и 20 частей воды. Сколько надо взять каждого из этих веществ, чтобы приготовить 296 г смеси?



2.52. Для варки вишневого варенья было куплено 9 кг сахара. Сколько нужно взять вишен и сколько воды, чтобы сварить варенье, если вишни, сахар и вода берутся в отношении $1 : 1,5 : 0,15$ соответственно?



2.53. При варке варенья чернику, сахар и воду берут в отношении $2 : 2 : 0,1$ соответственно. Сколько нужно сахара и воды, чтобы сварить варенье из 8 кг черники?

2.54°. Принадлежит ли графику функции $y = -3,5x$ точка:

- | | |
|------------------|-------------------|
| 1) $A(-1; 0);$ | 2) $B(2; -1);$ |
| 3) $C(1; -3,5);$ | 4) $D(-2; 7);$ |
| 5) $M(0; 8);$ | 6) $K(-10; -35)?$ |

2.55°. Прямая пропорциональность задана формулой:

- 1) $y = -\frac{1}{5}x;$ 2) $y = 10x.$

Какие из точек $A(1; -5)$, $B(2; \frac{1}{5})$, $C(10; -2)$, $D(0; 0)$, $E(-1; -10)$, $P(5; -1)$ принадлежат графику данной функции?

2.56°. Изобразите график функции $y = 4x$. Используя формулу $y = 4x$ или полученный график, определите:

1) абсциссу точки графика функции, ордината которой равна 2; 4; -8; -4; 0; 1;

2) проходит ли график функции через точки $A(1; 4)$, $B(-1; 4)$, $C(-2; -\frac{1}{8})$, $D(-3; -12)$, $E(\frac{1}{4}; 1)$;

3) есть ли на графике функции точка, абсцисса которой равна 100; 2000; -300; -1200; если да, то какая у нее ордината.

2.57. Изобразите график функции $y = -\frac{5}{6}x$. Назовите несколько точек этого графика, координаты которых являются целыми числами.

2.58°. Изобразите в одной системе координат графики функций:

$$1) \begin{matrix} y = \frac{1}{2}x; & y = -2x; & y = 5x; \end{matrix}$$

$$2) \begin{matrix} y = -\frac{1}{2}x; & y = 2x; & y = -5x; \end{matrix}$$

$$3) \begin{matrix} y = 3x; & y = -\frac{1}{3}x; & y = 6x; \end{matrix}$$

$$4) \begin{matrix} y = \frac{1}{3}x; & y = -3x; & y = -6x. \end{matrix}$$

2.59. Существует ли такое значение аргумента, при котором значение функции $y = 1,5x$ равно -600; -1200? Если да, то найдите его.

2.60°. Изобразите график функции $y = -\frac{2}{3}x$. По графику функции найдите:

1) приближенное значение функции для значений аргумента: -5; -2; 2,5; 4;

2) приближенное значение аргумента для значений функции: -3 ; -2 ; $4,5$; 6 .

2.61. На рисунке 31 изображен график зависимости скорости движения поезда от времени.

1) Найдите промежуток времени, на котором зависимость была прямо пропорциональной.

2) Какой была скорость поезда с 1 ч до 4 ч?

2.62. На рисунке 32 изображены графики движения Маши и Даши.

1) Найдите по графику скорость движения каждой девочки.

2) Напишите формулу пройденного каждой девочкой пути в зависимости от времени.

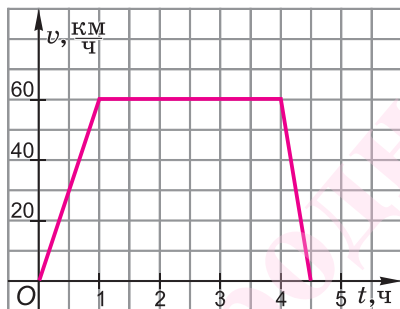


Рис. 31



Рис. 32

2.6. Линейная функция

Определение. *Линейной функцией* называется функция вида

$$y = kx + b,$$

где k и b — числа; ее область определения состоит из всех чисел.

Здесь независимая переменная x (аргумент) может принимать любое значение.

Например:

а) Линейными являются функции:

$$y = 2x + 1; \quad y = -2x + 1; \quad y = 2x - 1; \quad y = -2x - 1.$$

б) Функция $y = kx$ ($k \neq 0$) — прямая пропорциональность — это частный случай линейной функции $y = kx + b$ при $k \neq 0$, $b = 0$.

в) Еще один частный случай: когда $k = 0$, линейная функция принимает вид $y = 0 \cdot x + b$, т. е. $y = b$. Такая функция называется **постоянной**. При любом значении аргумента x эта функция принимает одно и то же значение b .

Рассмотрим функцию $y = 3x - 2$.

Составим таблицу значений этой функции и сравним ее с таблицей значений функции $y = 3x$.

x	-2	-1	0	1	2
$y = 3x$	-6	-3	0	3	6
$y = 3x - 2$	-8	-5	-2	1	4

Изобразим точки $(x; y)$ с указанными координатами и, соединив соответствующие точки, получим графики функций $y = 3x$ и $y = 3x - 2$ (рис. 33).

Очевидно, что при каждом значении аргумента x значение функции $y = 3x - 2$ меньше значения функции $y = 3x$ на 2 единицы.

Поэтому каждой точке графика функции $y = 3x$ соответствует точка графика функции $y = 3x - 2$ с той же абсциссой, а ординатой на 2 единицы меньше. Таким образом, каждая точка графика функции $y = 3x - 2$ получается сдвигом соответствующей точки графика функции $y = 3x$ на 2 единицы вниз вдоль оси Oy (см. рис. 33).

Значит, график функции $y = 3x - 2$ получается сдвигом прямой $y = 3x$ на 2 единицы вниз вдоль оси Oy . Поэтому графиком функции $y = 3x - 2$ является прямая, параллельная прямой $y = 3x$. Ее называют *прямой $y = 3x - 2$* .

Так как прямая определяется двумя точками, лежащими на ней, то мы можем сказать, что графиком функции $y = 3x - 2$ является прямая, проходящая через точки $(0; -2)$ и $(1; 1)$ (рис. 34).

Конечно, вместо этих точек можно указать две любые другие точки на этой прямой.

Легко убедиться, что каждый из графиков

$$y = 3x + 2; \quad y = -3x + 2; \quad y = -3x - 2$$

является прямой (рис. 35—37).

Прямая $y = 3x + 2$ параллельна прямой $y = 3x$ и проходит через точку $(0; 2)$ (см. рис. 35).

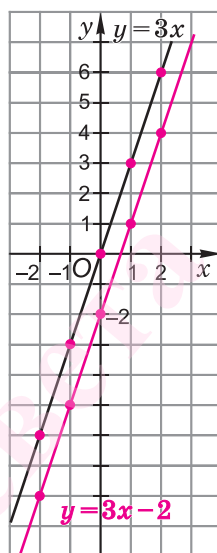


Рис. 33

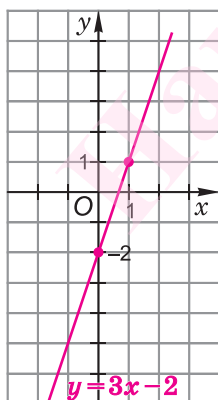


Рис. 34

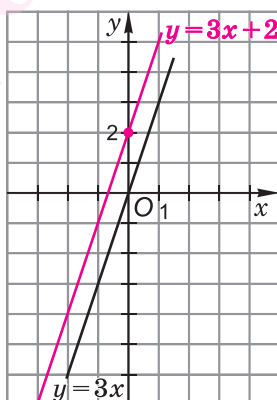


Рис. 35

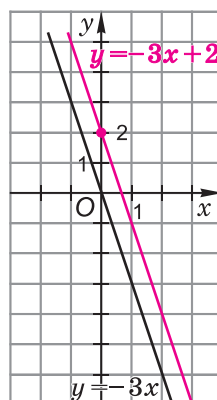


Рис. 36

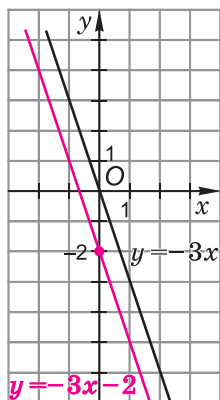


Рис. 37

Прямая $y = -3x + 2$ параллельна прямой $y = -3x$ и проходит через точку $(0; 2)$ (см. рис. 36).

Прямая $y = -3x - 2$ параллельна прямой $y = -3x$ и проходит через точку $(0; -2)$ (см. рис. 37).

Вообще,



графиком линейной функции $y = kx + b$ является прямая, проходящая через точку $(0; b)$ и параллельная прямой $y = kx$. Ее называют **прямой** $y = kx + b$.

Напомним, что если $k = 0$, то $y = b$, т. е. мы получаем постоянную функцию. Ее графиком является прямая, проходящая через точку $C(0; b)$ и параллельная оси Ox (рис. 38, а, б). При $b = 0$ график функции $y = 0$ совпадает с осью Ox .

Пример. Найти координаты точек пересечения прямой $y = -0,5x + 3$ с осями координат.

Решение. Ордината точки пересечения прямой с осью абсцисс равна 0. Значит, $-0,5x + 3 = 0$, откуда $x = 6$. Таким образом, $(6; 0)$ — точка пересечения прямой с осью Ox (рис. 39).

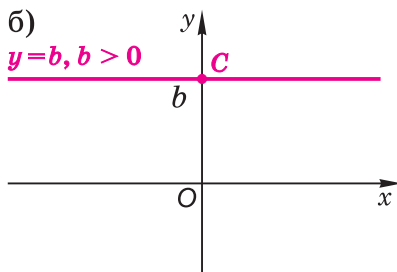
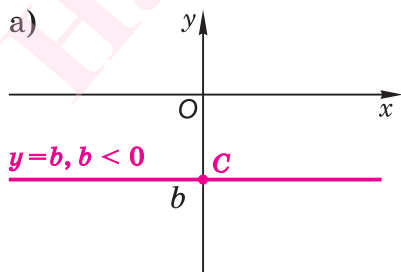


Рис. 38

Абсцисса точки пересечения прямой с осью ординат равна 0. Значит, $y = -0,5 \cdot 0 + 3$, т. е. $y = 3$. Таким образом, $(0; 3)$ — точка пересечения прямой с осью Oy (см. рис. 39).

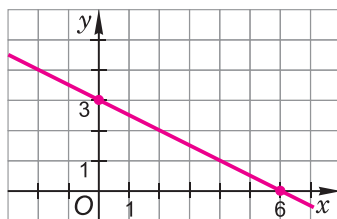


Рис. 39

Ответ: $(6; 0)$ и $(0; 3)$.

Замечание. Для изображения графика линейной функции бывает удобным находить точки пересечения этого графика с осями координат.

А

Систему координат в честь знаменитого французского ученого Рене Декарта (1596—1650) называли декартовой.

?

1. Какая функция называется линейной?
2. Покажите, что прямая пропорциональность — это частный случай линейной функции.
3. Покажите, что постоянная функция — это частный случай линейной функции.
4. Как расположены относительно друг друга графики линейной функции $y = kx + b$ и прямой пропорциональности $y = kx$?
5. Как изобразить график функции $y = kx + b$, если прямая $y = kx$ уже изображена?
6. В каком случае график линейной функции совпадает с осью Ox ?

Упражнения

2.63°. Какой из формул задана линейная функция:

- 1) $y = x^2 - 3 - (x + 2)x$;
- 2) $y = 5 - x^2 - (x - 1)x$;
- 3) $y = 2x - 5 - (3x + 6)$;
- 4) $y = -7x + 8 - (2x + 15)$;

- 5) $y = x(2 - x) + x^2$; 6) $y = x^2 - x(8 + x)$;
 7) $y = (x + 3)3 - x + 1$; 8) $y = 5 - x - 2(x + 2)$;
 9) $y = x + 4 - (x + 4)x$; 10) $y = x - 7 - (x - 7)x$?

2.64. Существует ли линейная функция, графику которой принадлежат точки $(x; y)$ с координатами, указанными в таблице?

1)

x	-2	-1	0	1	2	3	4
y	2	0	-2	-4	-6	-8	-10

2)

x	-2	-1	0	1	2	3	4
y	-3	0	3	6	9	12	18

2.65°. Верно ли, что графику линейной функции $y = -3x + 5$ принадлежит точка:

- 1) $A(0; 5)$; 2) $B(2; -1)$; 3) $C(2; -5)$;
 4) $D(-10; 0)$; 5) $M(1; 2)$; 6) $K(-1; 11)$;
 7) $E(10; -25)$; 8) $T(-10; 35)$; 9) $P(3; -14)$?

2.66. Функция задана формулой $y = 6x - 2$.

- 1)° Найдите значение функции, если значение аргумента равно -3 ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 .
 2)° При каком значении аргумента значение функции равно -4 ; -2 ; 0 ; 1 ; 3 ; 6 ?
 3) Существует ли такое значение x , при котором значение функции равно значению аргумента?
 4) Существует ли такое значение x , при котором значение функции противоположно значению аргумента?

2.67°. Найдите координаты точек пересечения с осями Ox и Oy графика функции, заданной формулой:

- 1) $y = 0,6x - 18$; 2) $y = 25 + 0,5x$;
 3) $y = 1,7x + 6,8$; 4) $y = -1,21x - 1,1$.

2.68°. В одной системе координат изобразите графики функций, заданных формулами $y = 2x$ и $y = 2x - 3$.

2.69. В одной системе координат изобразите графики функций, заданных формулами:

1) $y = \frac{1}{2}x - 2$, $y = \frac{1}{2}x + 2$, $y = -\frac{1}{2}x + 2$,

$y = -\frac{1}{2}x - 2$;

2) $y = 4x - 1$, $y = 4x + 1$, $y = -4x + 1$, $y = -4x - 1$.

Назовите координаты точек пересечения графика каждой из функций с осями Ox и Oy .

2.70°. Верно ли, что график функции, заданной формулой $y = 2,7x - 8$, параллелен графику функции:

1) $y = -2,7x + 3$; 2) $y = (-1)^6 \cdot 2,7x + 9$;

3) $y = (-1)^7 2,7x - 5$; 4) $y = 2,7x$;

5) $y = \frac{27}{10}x - 2$; 6) $y = \frac{27^2}{10^2}x + 1$?

2.71°. Из функций

$y = 4x + 3$, $y = -3$, $y = -3x - 4$,

$y = -4x$, $y = 3x$, $y = 4x - 3$,

$y = 4x$, $y = -4x - 3$, $y = 3x + 4$,

$y = -4x + 3$, $y = 3x - 4$, $y = -3x + 4$

выберите те, графики которых:

- 1) параллельные прямые;
 2) пересекающиеся прямые.

2.72°. Найдите значение коэффициента a , если график функции $y = ax + 6$ параллелен графику функции:

- 1) $y = 2,8x$; 2) $y = -13,4x + 8$;
3) $y = -7,8x - 13$; 4) $y = 14,5$.

2.73°. Задайте формулой какую-нибудь линейную функцию, график которой параллелен графику функции:

- 1) $y = 3,6x - 5$; 2) $y = -7,3x + 8$;
3) $y = -4,4x - 2$; 4) $y = 6,2x + 3$.

2.74. Найдите k и b , если известно, что прямая $y = kx + b$ параллельна прямой $y = 2x$ и проходит через точку:

- 1) $A(3; 10)$; 2) $C(-8; 4)$;
3) $B(-\frac{1}{2}; 6)$; 4) $D(1\frac{1}{4}; \frac{3}{2})$.

2.75°. Изобразите в одной системе координат графики функций:

- 1) $y = 5$; $y = -5$; $y = 0$;
2) $y = -4$; $y = 4$; $y = -0$.

2.76. Графиком линейной функции является прямая, параллельная оси Ox и проходящая через точку:

- 1) $A(2; 7)$; 2) $B(-15; -4)$;
3) $C(6; -3,5)$; 4) $D(-100; 2)$.

Задайте формулой эту функцию и изобразите ее график.

2.77. Задайте формулой линейную функцию, график которой пересекает ось Oy в той же точке, что и график функции:

- 1) $y = -x - 3$; 2) $y = x + 5$;
3) $y = 6x - 7$; 4) $y = -7x + 8$.

- 2.78. На рисунке 40 изображены прямые — графики линейных функций. Для каждой прямой напишите формулу, задающую соответствующую функцию.

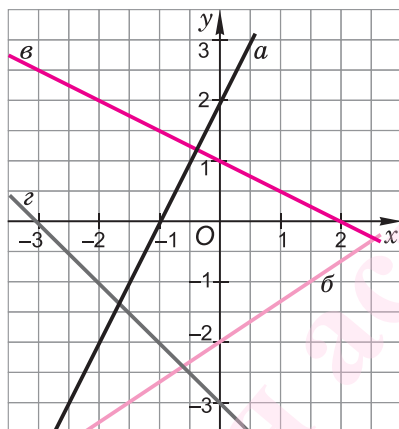


Рис. 40

- 2.79. 1) Функция задана формулой $y = kx + 6,2$. Найдите значение k , если $y = -3,8$ при $x = 10$.
 2) Функция задана формулой $y = 4,8x + b$. Найдите значение b , если $y = 6,1$ при $x = -0,25$.
- 2.80. Функция задана формулой $y = 4x + b$. Найдите значение b , если известно, что:
 1) при значении аргумента, равном 2, значение функции равно 22;
 2) при значении аргумента, равном 4, значение функции равно 3.
- 2.81. Функция задана формулой $y = kx + b$. Известно, что ее график проходит через точку $B(-4; 2)$ и параллелен графику функции $y = 5x + 2$. Изобразите график заданной функции.

2.82. Функция задана формулой $y = kx + b$. Известно, что ее график проходит через точку $C(-4; -1)$ и параллелен графику функции $y = -3x$. Изобразите график заданной функции.

2.83*. При каких значениях a точка $M(a; -2a)$ принадлежит графику функции:

1) $y = x$;

2) $y = -x$;

3) $y = \frac{2}{3}x - \frac{8}{3}$;

4) $y = -3,5x - 1$;

5) $y = \frac{3}{5}x - \frac{7}{5}$;

6) $y = 8x + 6$?

Глава 3

МНОГОЧЛЕНЫ

3.1. Одночлены

Рассмотрим выражение

$$17a^3y^2(-4)bz^5az^2,$$

где a , b , y и z — переменные. Это выражение является произведением чисел и степеней переменных с натуральными показателями и называется *одночленом*.

Определение. *Одночлен* — произведение чисел и степеней переменных с натуральными показателями.

Числа и степени переменных с натуральными показателями также считаются одночленами.

Число 0 называется *нулевым одночленом*.

Например, выражения

$$0; -3; 5^3; \frac{1}{4}; t; t^6,$$

а также выражения на рисунке 41 являются одночленами, а выражение на рисунке 42 — не является.

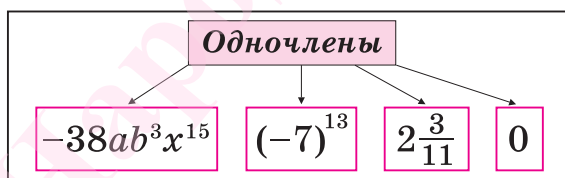


Рис. 41

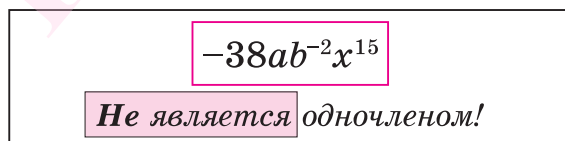


Рис. 42

Одночлен $17a^3y^2(-4)bz^5az^2$ можно упростить, используя тождественные преобразования (перемести-

тельный и сочетательный законы умножения, а также правила действий над степенями):

$$17a^3y^2(-4)bz^5az^2 = 17(-4)a^3aby^2z^5z^2 = (-68)a^4by^2z^7.$$

Такой вид одночлена называется **стандартным**.



В одночлене стандартного вида множители расположены в определенном порядке: на первом месте числовой множитель, а за ним степени различных переменных. Буквы, обозначающие переменные, в одночленах стандартного вида обычно записывают в алфавитном порядке. Заметим, что каждое число — это одночлен, записанный в стандартном виде. Стандартным видом нулевого одночлена является число 0.

Числовой множитель в одночлене стандартного вида, содержащем переменные, называется коэффициентом одночлена.

Например, одночлены

$$(-21)xy^2z^3; \quad \frac{1}{21}ab^4; \quad abc$$

имеют стандартный вид. Их коэффициенты соответственно равны

$$-21; \quad \frac{1}{21}; \quad 1.$$

Поясним последний пример. Коэффициент одночлена abc считается равным 1, так как при любых значениях переменных a , b , c верно равенство

$$abc = 1abc.$$

Таким образом, если одночлен в стандартном виде имеет множителями только переменные, то его коэффициент считается равным 1 (его обычно не записывают).

Заметим еще, что при любых значениях переменных x, y, z будет верным равенство

$$(-21)xy^2z^3 = -21xy^2z^3.$$

Таким образом, если одночлен в стандартном виде имеет отрицательный коэффициент, то его можно записать так: на первом месте — знак минус, за ним — модуль коэффициента, а затем — степени различных переменных.

Пользуясь тождественными преобразованиями, любой одночлен можно записать в стандартном виде; значит, **любой одночлен тождественно равен некоторому одночлену, записанному в стандартном виде.**

Говоря о тождественно равных одночленах, слово «тождественно» часто опускают.

Пример 1. Записать одночлен

$$B = \frac{1}{3}p^4yq(-6)a^2bp^3xy^2 \cdot 2apx$$

в стандартном виде.

Решение.

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{3}p^4yq(-6)a^2bp^3xy^2 \cdot 2apx = \\ &= \frac{1}{3}(-6)2p^4p^3pyy^2qa^2abxx = -4a^3bp^8qx^2y^3. \end{aligned}$$

Ответ: $B = -4a^3bp^8qx^2y^3$.

Пример 2. Доказать тождество $0a^2bc^3 = 0$.

Доказательство. При любых значениях a, b и c значение левой части этого равенства равно нулю, т. е. равно значению его правой части. Значит, равенство $0a^2bc^3 = 0$ является тождеством. $\square$

Рассуждения, которые использовались в примере 2, показывают, что если в одночлене один из множителей равен нулю, то этот одночлен является *нулевым одночленом*.

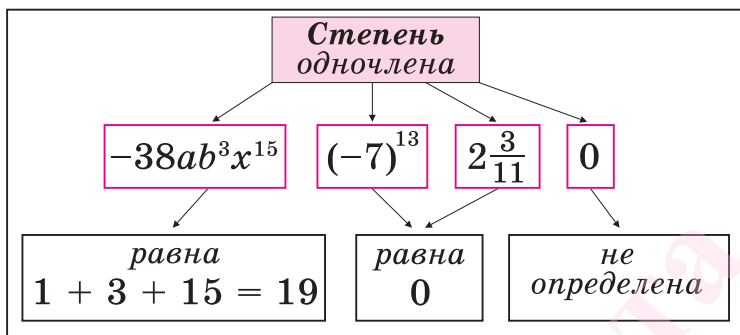


Рис. 43

Если ненулевой одночлен содержит переменные, то *степенью одночлена* называется сумма показателей степеней всех этих переменных.

Если ненулевой одночлен не содержит переменных (т. е. является числом), то его степенью считается число 0.

Степень нулевого одночлена не определена.

Например, степень одночлена $-\frac{2}{3}a^2cd^3$ равна 6 — сумме показателей степеней переменных ($2 + 1 + 3 = 6$). Говорят еще, что это *одночлен шестой степени*. А степень одночлена B из примера 1 равна 18 (обсудите это).

Степень одночлена $341,7$ равна 0. Говорят еще, что это *одночлен нулевой степени*.

Аналогичные примеры показаны на рисунке 43.



1. Что называется одночленом?
2. Приведите примеры одночленов стандартного вида.
3. Как принято располагать множители в одночлене стандартного вида?
4. Что такое нулевой одночлен?
5. Что называется коэффициентом одночлена?
6. В каком случае коэффициент одночлена не записывают?

7. Как найти степень одночлена? Всегда ли ее можно определить?
8. Что называется степенью ненулевого одночлена с переменными? Без переменных?

Упражнения

3.1°. Запишите одночлен в стандартном виде и определите его степень:

- 1) $\left(\frac{1}{5}\right)^3 25^2$;
- 2) $2^5 \cdot \frac{1}{16}$;
- 3) $3^4 \cdot 3^2 \cdot \frac{1}{81}$;
- 4) $6^9 \cdot 4^2 \left(\frac{1}{36}\right)^4$;
- 5) $3^7 \cdot 0 \cdot \left(\frac{3}{7}\right)^2$;
- 6) $\left(\frac{2}{5}\right)^9 2^2 \cdot 0$.

3.2°. Определите степень одночлена:

- 1) $2,5a^4b^2d^6$;
- 2) $6,4m^6n^2p^4q$;
- 3) $\frac{36}{81}c^8d^4m^2p$;
- 4) $\frac{25}{49}x^4y^8z^{10}$;
- 5) $0 \cdot m^{11}n^3$;
- 6) $0 \cdot p^3q^2t$;
- 7) 5^2tpq ;
- 8) tpq .

Запишите одночлен в стандартном виде, определите его степень и коэффициент (**3.3—3.5**).

- 3.3°.**
- 1) a^2a^3 ;
 - 2) t^6t^{13} ;
 - 3) $x^4x^2x^3$;
 - 4) $a^4a^2a^5$;
 - 5) $-6cd\frac{1}{2}c^2d^3$;
 - 6) $(-4)a^2cd\left(\frac{1}{8}\right)ac^3$;
 - 7) $-3a^4(-2)b^6n^2$;
 - 8) $0,5c^2d^3\left(\frac{1}{4}\right)c^3$;
 - 9) $2m^2n^3(-3)m$;
 - 10) $-x^2y^2xc \cdot 0,36$.

- 3.4°.**
- 1) $3,2a \cdot 0,25ab$;
 - 2) $0,4xy\left(-\frac{1}{2}\right)xz$;
 - 3) $-4ab^2\left(-\frac{1}{8}\right)bc$;
 - 4) $-7xy^2\frac{1}{21}x^2y$;
 - 5) $-\frac{2}{3}nk^2(-0,3)nm$;
 - 6) $-3xyz(-0,1)xy\frac{1}{3}z$;

- 7) $6^2 a^2 b^3 (-0,1)^2 a$; 8) $0,1^3 a^2 b (-2)^2 ab$;
 9) $-2,4a \left(-\frac{1}{6}\right) a^2 mn$; 10) $-\frac{2}{7} ab^2 (-7)^2 a^2 b^3$.

- 3.5. 1) $-3a(-1,2)kc^2t^4pk^3t^4(-5)p^4c$;
 2) $4mp(-0,1)t^4a^3(-2)ba^2k^2p^3m$;
 3) $0,5p(-7)qk^4 \cdot 2t^2p^3bm^2a^3(-3)pka$;
 4) $6dp^5ak^2(-0,3)ndt^2(-2)a^3p^4t^3n^4k^2$.

3.6°. Укажите коэффициент (k) и степень (p) одночлена:

- 1) $21x^2 \left(-\frac{1}{3}\right) y^2 \left(-\frac{2}{7}\right) x^4 yzx$;
 2) $-1 \frac{2}{3} ab^3 \cdot 2a^3b \cdot 0 \cdot \left(-4\frac{1}{2}\right) a^2b$;
 3) $24x^2y^3 \cdot 0 \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) x^2y(-0,5)xy$;
 4) $0,002m^3n^3z^2(-100)mnz^3$;
 5) $0,2xyz \cdot 5x^2y^2z^2$;
 6) $7stq^2 \frac{1}{7} s^3t^3$.

Найдите значение одночлена (3.7—3.8).

- 3.7°. 1) $\frac{2}{3} x^3 x$ при $x = -3$;
 2) $1,5a^2 a$ при $a = -2$;
 3) $4xyz \cdot 0,25y^2 x^3 z^5$ при $x = -1$, $y = -1$, $z = -2$;
 4) $5abc \cdot 0,2c^2 b^3 a^4$ при $a = -2$, $b = -1$, $c = -1$.

- 3.8°. 1) $a^2 \cdot 3ab$ при $a = \frac{1}{3}$, $b = -1$;
 2) $\frac{1}{3} x^2 y (-15)y$ при $x = -\frac{1}{5}$, $y = -\frac{2}{3}$;
 3) $-3,8a^2 b \cdot 0 \cdot \frac{2}{19} b^3$ при $a = \frac{1}{4}$, $b = -3$;
 4) $-\frac{7}{2} xy \cdot 0 \cdot (-4)x$ при $x = -\frac{1}{7}$, $y = 2$.

3.2. Умножение одночленов. Возведение одночленов в степень

Представим произведение одночленов $-68a^4by^2z^7$ и $\frac{1}{2}bcxy$ в стандартном виде:

$$\begin{aligned} (-68a^4by^2z^7)\left(\frac{1}{2}bcxy\right) &= \left(-68 \cdot \frac{1}{2}\right)(a^4)(bb)(y^2y)z^7cx = \\ &= -34a^4b^2cxy^3z^7. \end{aligned}$$

Напомним, что одночлен — это произведение чисел и степеней переменных с натуральными показателями. Когда мы умножаем его на другой одночлен, опять получаем произведение чисел и степеней переменных с натуральными показателями.

Значит, произведение двух одночленов является одночленом.

Умножить одночлен на одночлен — это значит представить их произведение в стандартном виде.

Возвести одночлен в натуральную степень k — это значит представить произведение k таких одночленов в стандартном виде.

Пример 1. Выполнить умножение

$$(5ab^2x^7)(-6a^3b^5x^4).$$

Решение.

$$\begin{aligned} (5ab^2x^7)(-6a^3b^5x^4) &= \\ &= (5(-6))(aa^3)(b^2b^5)(x^7x^4) = -30a^4b^7x^{11}. \end{aligned}$$

Пример 2. Возвести одночлен $2m^7n^3z^4$ в пятую степень.

$$\begin{aligned} \text{Решение. } (2m^7n^3z^4)^5 &= \\ &= (2m^7n^3z^4)(2m^7n^3z^4)(2m^7n^3z^4)(2m^7n^3z^4)(2m^7n^3z^4) = \\ &= (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2)(m^7m^7m^7m^7m^7)(n^3n^3n^3n^3n^3)(z^4z^4z^4z^4z^4) = \\ &= 2^5(m^7)^5(n^3)^5(z^4)^5 = 32m^{35}n^{15}z^{20}. \end{aligned}$$

Пример 3. Возвести одночлен $-\frac{3}{2}p^5q^7t$ в шестую степень.

Решение.

$$\left(-\frac{3}{2}p^5q^7t\right)^6 = \left(-\frac{3}{2}\right)^6 (p^5)^6 (q^7)^6 t^6 = \frac{729}{64} p^{30} q^{42} t^6.$$



1. Что значит умножить одночлен на одночлен?
2. Что значит возвести одночлен в натуральную степень k ?

Упражнения

Выполните умножение одночленов (3.9—3.11).

- 3.9°.** 1) $(4m)(2m)$; 2) $(3m)(12n)$;
 3) $(3x)(-2x^2)$; 4) $(-4m^3)\left(-\frac{1}{2}m\right)$;
 5) $(-2a^3)(3ab)$; 6) $\left(\frac{1}{6}x^2\right)(36x^2y)$;
 7) $(0,4a^2)\left(\frac{1}{2}ab^4\right)$; 8) $(-3a^4)(-0,1ab)$;
 9) $(-3,2x)(0,5x^2y^2)$; 10) $\left(-\frac{4}{9}a^5\right)(-9ba)$.
- 3.10°.** 1) $2mn(-4m^2n^2)$; 2) $(-2m^2n^2)(-9mn^2)$;
 3) $(4,5mn^2)\left(\frac{1}{9}m^2x\right)$; 4) $(9m^2n)\left(\frac{2}{3}n^2c\right)$;
 5) $(0,39cb)(-100ac)$; 6) $(0,14xy)(-40yz)$;
 7) $\left(-\frac{1}{2}ab\right)(40a^2b^7)$; 8) $\left(-\frac{1}{6}m^2n\right)(-30mn^2)$;
 9) $\left(\frac{4}{9}xy\right)(-81z^2y)$; 10) $\left(-\frac{3}{4}a^2n\right)(-0,36an)$.
- 3.11.** 1) $(4axy)\left(-\frac{1}{2}x^2y\right)$;
 2) $(6a^4x^2y)\left(-\frac{1}{3}a^2xy\right)$;
 3) $\left(\frac{2}{7}x^2mn\right)\left(-\frac{7}{8}xm^2n\right)$;

- 4) $\left(-\frac{2}{3}mny^2\right)\left(\frac{3}{16}m^3n^2y\right);$
 5) $\left(\frac{2}{11}xyz\right)\left(-\frac{121}{124}x^2y^3z\right);$
 6) $\left(-\frac{2}{3}a^2b^2c\right)\left(-\frac{3}{4}ab^2c^2\right);$
 7) $(-0,8a^2b^3c^4d)(-1,2bc)(0abc);$
 8) $\left(-2\frac{1}{2}a^2b^3c^4\right)\left(-\frac{2}{5}ab^3c^2d\right)(0bcd);$
 9) $\left(-2\frac{3}{7}x^3y^7z\right)\left(-2\frac{4}{7}xyz\right);$
 10) $\left(-3\frac{2}{3}x^3yc^4\right)\left(-1\frac{1}{4}xy^4c\right).$

3.12°. Найдите значение выражения:

- 1) $\left(\frac{1}{4}x^2\right)(x^3yz)$ при $x = -1, y = -4, z = 0,2;$
 2) $\left(\frac{3}{7}xy\right)(x^2yz)$ при $x = 3, y = -7, z = -\frac{1}{81};$
 3) $(-4x^3) \cdot 0 \cdot \left(-\frac{2}{3}xy\right)$ при $x = -3, y = -2\frac{1}{3};$
 4) $\left(-\frac{1}{8}x^2\right) \cdot 0 \cdot (-3xy^2)$ при $x = -1\frac{1}{3}; y = -\frac{1}{2}.$

Возведите одночлен в степень (3.13—3.15).

- 3.13°.** 1) $(b^4)^2;$ 2) $(-2a)^3;$ 3) $\left(-\frac{1}{2}xy\right)^3;$
 4) $\left(-\frac{1}{4}x^2y\right)^2;$ 5) $\left(\frac{1}{3}a^8c\right)^3;$ 6) $\left(-\frac{1}{7}x^2y^3\right)^2;$
 7) $\left(\frac{3}{4}a^3bc^2\right)^2;$ 8) $(-2a^2b)^3;$ 9) $\left(-\frac{2}{5}a^4bt^3\right)^3.$

- 3.14°.** 1) $(4x^2)^5;$ 2) $(2a^3)^4;$ 3) $(-2a^2b)^4;$
 4) $(-4x^2y)^3;$ 5) $(-xyz)^9;$ 6) $(x^2y^3z)^3;$
 7) $(-10x^3y^2a^2)^3;$ 8) $\left(-\frac{1}{4}a^3x\right)^4;$ 9) $\left(-\frac{2}{3}a^4b^3c\right)^5.$

- 3.15.** 1) $(-3y^2a)^3$; 2) $(-5x^3y)^4$; 3) $\left(-\frac{1}{2}x^5y^2\right)^4$;
 4) $\left(-\frac{3}{4}xy^2\right)^3$; 5) $(0,1ay^2)^5$; 6) $(0,2a^2y^5)^3$;
 7) $\left(-\frac{1}{3}x^3y^2\right)^3$; 8) $\left(-\frac{1}{2}a^2y^2z\right)^5$; 9) $(0,4a^2y^3)^2$;
 10) $(0,01a^2b)^2$.

3.16. Представьте выражение в виде квадрата или куба одночлена:

- 1) $9a^6$; 2) $4b^2$;
 3) $49x^2y^2$; 4) $0,81a^{10}y^4$;
 5) $1,69a^8b^6$; 6) $\frac{1}{64}x^3y^6$;
 7) $-0,008a^9b^{12}$; 8) $-0,001a^{12}b^{12}$;
 9) $\frac{1}{125}m^{21}n^{27}$; 10) $0,027m^{15}p^{36}$.

Выполните действия. Укажите коэффициент и степень одночлена, полученного в результате (**3.17—3.18**).

- 3.17°.** 1) $(-3x^3)^3(-2x)^4$; 2) $(-4y^2)^3(-3y^3)^2$;
 3) $(-0,1x^2y)^2(10xy^2c)$; 4) $(-0,2a^2y^2)^2\left(-\frac{1}{4}ayb\right)$;
 5) $(-0,9a^2b^2)^3\left(\frac{1}{27}bx\right)$; 6) $\left(3\frac{1}{3}a^2b^2\right)\left(\frac{3}{4}a^2b\right)^2$.

- 3.18°.** 1) $(-2ac)^3(3a^2b)^2(-0,5b^2c)^3$;
 2) $(6xy)^2\left(\frac{1}{6}x^2\right)^2(-4y^5)^3$;
 3) $(2ay^2)^2(-3a^3y)^3\left(-\frac{1}{3}ay\right)^3$;
 4) $(0,2xy^2)^3(-4x^2yz)^4\left(-\frac{1}{4}y^2z^2\right)^4$;
 5) $\left(-\frac{1}{2}ay^3\right)^4\left(-\frac{2}{3}y^3b\right)^4\left(-\frac{3}{5}ayb\right)^3$;
 6) $(-4ab^2c^2)^2(-5abc)^3(-0,2a^2bc)^2$.

3.3. Многочлены

Рассмотрим выражение

$$3ax^2 - 2bx + b + 7.$$

Оно является суммой одночленов $3ax^2$, $-2bx$, b и 7 . Такое выражение называют *многочленом*, а $3ax^2$, $-2bx$, b и 7 — его *членами*.

Определение. Многочленом называется сумма одночленов.

Одночлен также считается многочленом.

Число 0 называется *нулевым многочленом*.

Одночлены, из которых составлен многочлен, называются *членами этого многочлена*.



1. Что называется многочленом?
2. Как называются слагаемые в многочлене?
3. Можно ли назвать многочленом выражение:
а) $3xy - 384$; б) $0 + 5ab^2$; в) 0 ?
4. Что называется нулевым многочленом?

Упражнения

3.19°. Составьте многочлен из одночленов:

- 1) $2c$, $-d$, $-3a$;
- 2) $4y$, $-5a$, $-8t$;
- 3) $3x$, $-4y^2$, $-b$, $-2ax$;
- 4) $-5m$, $6n^3$, $-t$, $-8mt$;
- 5) $23a^2bc^2$, $-10ab^2c^2$, $-15a^2bc$, abc ;
- 6) mnk , $-7m^2n^2k$, $4m^3nt^2$, $-m^2n^2k^3$;
- 7) $-3mn$, $4m^2n^2$, $-8m^2n$;
- 8) $-6xy$, $-x^2y$, $9xy^2$;
- 9) $-25k^2$, $-32k^2y$, $48ka$;
- 10) $-4m^3y$, $-10m^2x$, $8mxy$.

3.20°. Упростите многочлен, записав каждый его член в стандартном виде:

1) $4xy \cdot 0,1yx + 3x^2y \cdot 4yx - 0,4xy^2 \cdot 2,5x^3y^4$;

2) $2m^3n^2 \cdot 0,5mn + 5m^2n^3 \cdot 0,2m^4n -$
 $- 0,8mn^3 \cdot 0,125m^3n^5$;

3) $5bbbbbb \left(-\frac{2}{5}\right)xb^2 + \frac{2}{3}aa$;

4) $-\frac{1}{3}mmmmmm(-9mn^2) + 10nnnnn$;

5) $3,1y^3y^2(-2)y^4a - 8yaz \cdot 1,2y^2a^8zzz$;

6) $1,5m^6m^2(-3)ma^2 - 6m^4ab^3\left(-\frac{1}{3}\right)maaabbbbb$;

7) $\frac{2}{7} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{2}{7} t^4(-49)(-49)tttt +$
 $+ 5 \cdot 5 \cdot 5nknknknk\left(-\frac{1}{25}\right)n^3k^5$;

8) $\frac{4}{9} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{4}{9} m^2(-81)mn - 6xyxyxy\left(-\frac{2}{3}\right)x^2y$.

3.21*. Используя различные натуральные степени переменных p и k , а также целые числа, составьте многочлен, состоящий из суммы пяти одночленов, у которого:

- 1) степени всех членов различны и больше 7;
- 2) степени всех членов равны 7;
- 3) степень каждого из членов не определена;
- 4) степень каждого из членов равна 0.

3.4. Приведение подобных членов



Напомним, что слагаемые называются подобными, если они одинаковы или отличаются только коэффициентами.

Подобные слагаемые в многочлене называются *подобными членами многочлена*.

Члены многочлена подобны, если они тождественно равны или отличаются только коэффициентами.

Приведение подобных слагаемых в многочленах называется **приведением подобных членов многочлена**.

Пример 1. Привести подобные члены многочлена

$$7ab - 2ab + 19ab.$$

Решение.

$$7ab - 2ab + 19ab =$$

↓ в каждом члене многочлена есть общий множитель ab ; вынесем его за скобки ↓

$$= (7 - 2 + 19)ab =$$

↓вычислим сумму коэффициентов членов многочлена↓

$$= 24ab.$$

Чтобы привести подобные члены многочлена, нужно найти сумму коэффициентов этих членов и умножить ее на общий множитель из переменных (рис. 44).

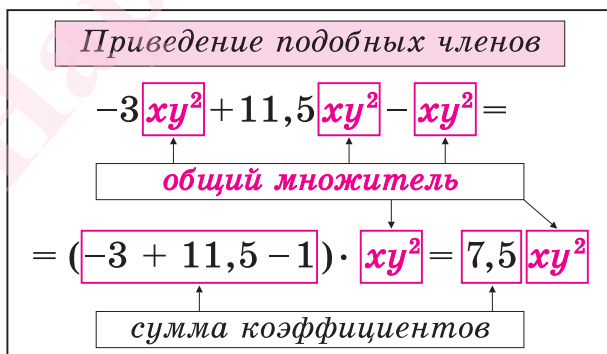


Рис. 44

Пример 2. Привести подобные члены многочлена

$$7ax^2 - 3 - 4ax^2 + 1 - 4ax^2.$$

Решение. Члены многочлена $7ax^2$, $-4ax^2$, $-4ax^2$ подобны, так как они либо равны, либо отличаются только коэффициентами. Числа -3 и 1 (как и любые числа) также подобны. Приведем подобные члены:

$$\begin{aligned}(7ax^2 - 4ax^2 - 4ax^2) + (-3 + 1) &= \\ &= (7 - 4 - 4)ax^2 - 2 = -ax^2 - 2.\end{aligned}$$

В примере 2 после приведения подобных членов получился многочлен $-ax^2 - 2$. В этом многочлене уже нет подобных членов, и каждый его член записан в стандартном виде. Такой многочлен называется *многочленом стандартного вида*.

Итак, *многочленом стандартного вида* называется многочлен, у которого все члены имеют стандартный вид и не являются подобными.

Для многочленов стандартного вида, состоящих из двух и трех слагаемых, употребляются особые названия: *двучлен* и *трехчлен*.

Например: $ax + b$, $a^2 - b^2$ — двучлены;

$a^2 - 2ab + b^2$, $13x^2 + px + c$ — трехчлены;

$5x + 6x^3y^5 - 17xy + 8xy^2 - 12y$ — многочлен, составленный из пяти одночленов.

Пользуясь тождественными преобразованиями, любой многочлен можно записать в стандартном виде; значит, любой многочлен тождественно равен некоторому многочлену, записанному в стандартном виде.

Говоря о тождественно равных многочленах, слово «тождественно» часто опускают.

Пример 3. Привести подобные члены в многочлене

$$5tx - 2ay^2 + 17tx + 15 - ay^2 - 8 + 5tx.$$

Решение. Подчеркнем разными линиями подобные члены:

$$\underline{5tx} - \underline{2ay^2} + \underline{17tx} + \underline{15} - \underline{ay^2} - \underline{8} + \underline{5tx} =$$

↓ воспользуемся переместительным законом сложения ↓

$$= (5tx + 17tx + 5tx) + (-2ay^2 - ay^2) + (15 - 8) =$$

↓ воспользуемся распределительным законом ↓

$$= (5 + 17 + 5)tx + (-2 - 1)ay^2 + (15 - 8) =$$

↓ вычислим суммы чисел в скобках ↓

$$= 27tx - 3ay^2 + 7.$$

Пример 4. Привести подобные члены:

$$17kpx^3 - 5p^2x + kpx^3 + 8kx + 5px + 5p^2x - 19kx + 3.$$

Решение.

$$\underline{17kpx^3} - \underline{5p^2x} + \underline{kpx^3} + \underline{8kx} + \underline{5px} + \underline{5p^2x} - \underline{19kx} + 3 =$$

$$= (17 + 1)kpx^3 + (-5 + 5)p^2x + (8 - 19)kx + 5px + 3 =$$

$$= 18kpx^3 - 11kx + 5px + 3.$$

Замечание. Одночлены $-5p^2x$ и $5p^2x$ отличаются только знаком и в сумме дают нуль:

$$(-5 + 5)p^2x = 0 \cdot p^2x = 0.$$

Про такие одночлены говорят, что это *противоположные одночлены*; при приведении подобных они *взаимно уничтожаются*.

Еще один пример дан на рисунке 45.

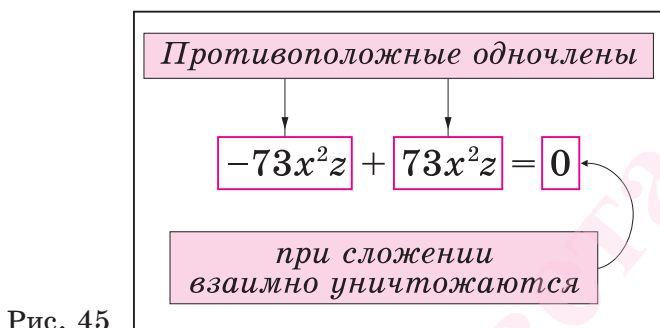


Рис. 45

Пример 5. Записать многочлен в стандартном виде:

а) $A = 5a(-0,2)bc^2 + c(-0,25)a \cdot 4bc - 0,3ab^3 \cdot 0c$.

б) $B = 2a(-4)abc^3 - 10a^2bc(-3)c^2 + 7ab^2(-7)ac^3$.

Решение.

а) $A = 5(-0,2)abc^2 + (-0,25)4abcc - 0,3 \cdot 0ab^3c =$
 $= -1abc^2 - 1abc^2 - 0 = (-1 - 1)abc^2 = -2abc^2$;

б) $B = 2(-4)aabc^3 - 10(-3)a^2bcc^2 + 7(-7)aab^2c^3 =$
 $= -8a^2bc^3 + 30a^2bc^3 - 49a^2b^2c^3 = 22a^2bc^3 - 49a^2b^2c^3$.

Ответ: а) $A = -2abc^2$;

б) $B = 22a^2bc^3 - 49a^2b^2c^3$.

Определение. Степенью ненулевого многочлена называется наибольшая из степеней одночленов, из которых он составлен, когда записан в стандартном виде.

Степень нулевого многочлена не определена.

Например, степень многочлена $2a^4 - \frac{1}{3}ab^2 + c$ равна 4, так как он записан в стандартном виде и составляющие его одночлены имеют степени 4; 3; 1. Говорят еще, что это *многочлен четвертой степени*.

На рисунке 46 степень многочлена не определена, а на рисунке 47 степень многочлена равна 36 (поясните почему).

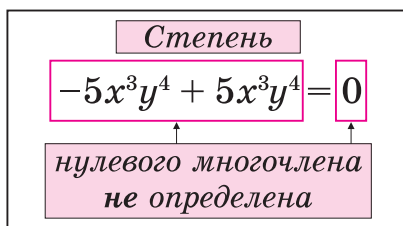


Рис. 46

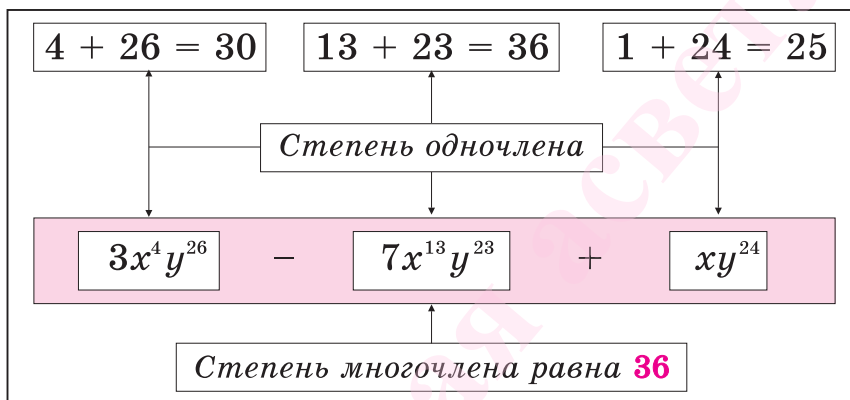


Рис. 47



1. Какие члены многочлена называются подобными?
2. Как привести подобные члены многочлена?
3. Что такое многочлен стандартного вида?
4. Приведите примеры двучлена; трехчлена; многочлена с четырьмя членами.
5. Каким может быть наименьшее число членов в многочлене?
6. Если в двучлене стандартного вида поменять места слагаемые, то получится ли двучлен стандартного вида?
7. Какие одночлены называются противоположными?
8. Что называется степенью ненулевого многочлена?
9. Любой ли многочлен имеет степень?

Упражнения

3.22. Запишите в виде суммы одночлена и трехчлена многочлен:

- 1) $3x^2 - 2x^4 - 5x - 1$;
- 2) $-2y^6 - 21x^5 + 13x + 2$;
- 3) $2,3xy - 2x^2y^2 - 8xy^2 - x^2y$;
- 4) $4,9ab^2 - 7a^2b + 2,6a^2b^2 - 13ab$.

Приведите подобные члены. Укажите степень полученного многочлена (**3.23—3.28**).

- 3.23°.**
- | | |
|---------------------------------|-----------------|
| 1) $23a - 5a$; | 2) $-2x - 4x$; |
| 3) $-4a + 2a$; | 4) $-5x + 3x$; |
| 5) $-1,7m - 1,3m$; | 6) $4n - 8n$; |
| 7) $1,3a^2 - 1,1a^2 - 0,2a^2$; | |
| 8) $1,8x^3 + 2,1x^3 - 1,9x^3$; | |
| 9) $ab - 2a + 3ab + 2a$; | |
| 10) $7xy - 3x + 3x - 8xy$. | |

- 3.24°.**
- | | |
|----------------------|--------------------------|
| 1) $3cd + 4cd$; | 2) $2xy + 5xy$; |
| 3) $7c^2d + 8c^2d$; | 4) $5x^2y + 7x^2y$; |
| 5) $5x^2y - 2x^2y$; | 6) $9a^2b^2 - 2a^2b^2$; |
| 7) $-3b^2 - 4b^2$; | 8) $-10x^2 - 8x^2$; |
| 9) $3md^2 - 7md^2$; | 10) $4a^2y - 9a^2y$. |

- 3.25.**
- | | |
|--|---|
| 1) $\frac{a}{3} + \frac{a}{4} + \frac{a}{12}$; | 2) $\frac{y}{5} + \frac{y}{3} - \frac{y}{15}$; |
| 3) $\frac{2}{3}y^2 + \frac{1}{6}y^2 - \frac{1}{9}y^2 - \frac{1}{36}y^2$; | |
| 4) $\frac{1}{7}z^3 + \frac{3}{14}z^3 - \frac{1}{3}z^3 + \frac{4}{21}z^3$; | |
| 5) $\frac{5}{2}a^2b^2 + \frac{5}{4}a^2b^2 - \frac{3}{4}a^2b^2 + \frac{7}{8}a^2b^2$; | |
| 6) $\frac{1}{2}x^2y - \frac{7}{8}x^2y + \frac{3}{4}x^2y - \frac{3}{8}x^2y - \frac{1}{2}x^2y$. | |

- 3.26°. 1) $-3a^3 - 2a^3 - 7a^3 + a^2$;
2) $-8b^2 - 4b^2 - 2b^2 + b^3$;
3) $-29b^2 - b^2 + b^2 - 4b^4$;
4) $-6a^3 - a^3 + 6a^2 - 2a^3$;
5) $2m^2dc + 6m^3dc + 4m^2dc$;
6) $8xyn^3 - 4xyn^3 + 5xyn^8$;
7) $2n^2lm^2 - n^2lm + 6n^2lm$;
8) $13acb^2 + 7ab^2c + 11ab^2c^3$.
- 3.27. 1) $10a^2 + 2a - 3a^2 + 5a$; 2) $12b^2 - 5b - 4b^2 + 3b$;
3) $-2x - 6 - 3x + 4$; 4) $-x^2 - 2 - 2x^2 - 3$;
5) $4y^4 - 3y - 2y^4 + 3y^2 + 4y + y^4$;
6) $5x^2 - 3x + 4 - 4x^2 - 8x - x^4$;
7) $7mn - 6m^2n^2 - 3mn^2 + 2mn - nm^2 - mn - 4m^2n^2$;
8) $19x^2yz + 12xyz^2 - 13x^2yz - xyz^2 + 2x^2yz + 3xyz^2$.
- 3.28°. 1) $-7a^3 + 8a^4 - 14a^3 - 3a^4 - 6a^3$;
2) $-23a^5 + 20a^2 - 4a^2 + 3a^5 - a^2$;
3) $12x^2 - 20a^2 + 8x^2 - a^2 + 10a^2 - 4x^2$;
4) $4ax + 2ab + 8ab - 7ax - 3ax + 5ab$;
5) $2,2y^5 + 3,7y^5 + 7,9y - 8,1y - 4y + 0,1y^5$;
6) $\frac{7}{12}a^8 - \frac{5}{12}a^3 + \frac{4}{12}a^3 - \frac{1}{2}a^8 - \frac{1}{12}a^8 - \frac{1}{12}a^3$;
7) $0,6m^2 + 1,3a^2 + \frac{1}{2}a^2 - 1\frac{1}{2}m^2 + \frac{1}{2}m^2 - 0,3a^2$;
8) $3,6p^2 - 4,5p^3 + 4,2p^3 + 1,3p^3 - 5,6p^2 + 1,5p^2$.
- 3.29. Определите, записан ли многочлен в стандартном виде:
- 1) $3x + x^2 - 5$; 2) $x^2 - 5 + 3x$;
3) $-5 + 3x + x^2$; 4) $x^2 + 3x - 5$;
5) $x^2 + 3x + x - 5$; 6) $x^2 - 2 + 8x - 3$.
- 3.30. Найдите значение многочлена:
- 1) $-7b^3 - 3b^2 + 4b^3 - 2b^2 - 2b^3 + 5b^2$ при $b = 4$;
2) $8a^3 - 2a - 4a + 2a^3 - a^3 + 7a$ при $a = 2$;

3) $-2,1a^2b + 4a + 1,1a^2b - 3a$ при $a = 4$, $b = 9$;

4) $1,3x^2 - 21xy^2 + 11xy^2 - (-0,7)x^2$ при $x = 2$,
 $y = 3$.

Решите уравнение (3.31—3.33).

3.31°. 1) $4x + 2x - 12 = 30$;

2) $4y + y + 4 = 29$;

3) $3b + 4b + 7 = 63$;

4) $9m - 3m - 5 = 25$;

5) $10h - 3h - 2 = 12$;

6) $19a - 14a - 3 = 22$;

7) $15d - 7d - 3 = 13$;

8) $25p - 19p - 12 = 14$.

3.32. 1) $2z + z + 4z = 21$;

2) $8t - 5t + 3t = 90$;

3) $4k + 2k + 6k = 144$;

4) $-2n + 4n + 6n = 64$.

3.33. 1) $3t - 12 + 2t + 2 - 4t = 15$;

2) $-3 + 6x + 9 - 2x + 13 = 0$;

3) $4x + 7 - 7x + 6x - 2 = 20$;

4) $-2x + 12 - 2x + 8x - 8 = 16$;

5) $5y + 12 - 8y + 7 + 6y = 21$;

6) $-4y - 10 + 12y + 5 + 4 = 15$;

7) $-5 - 3z + 25 + 4z - 10 = 4$;

8) $-8m - 1 + 6m - 3 + 4m = 4$.

3.5. Сложение и вычитание многочленов

Найдем сумму и разность многочленов

$$2x^3 - x^2 + 3x - 1 \text{ и } -7x^2 - 5x + 4.$$

Запишем сумму этих многочленов, раскроем скобки и полученный многочлен представим в стандартном виде:

$$\begin{aligned} & (2x^3 - x^2 + 3x - 1) + (-7x^2 - 5x + 4) = \\ & = 2x^3 - \underline{x^2} + \underline{3x} - \underline{1} - \underline{7x^2} - \underline{5x} + \underline{4} = 2x^3 - 8x^2 - 2x + 3. \end{aligned}$$

Запишем разность этих многочленов, раскроем скобки и полученный многочлен представим в стандартном виде:

$$(2x^3 - x^2 + 3x - 1) - (-7x^2 - 5x + 4) = \\ = 2x^3 - \underline{x^2} + \underline{3x} - \underline{1} + \underline{7x^2} + \underline{5x} - \underline{4} = 2x^3 + 6x^2 + 8x - 5.$$

Многочлен — это сумма одночленов. Когда мы складываем два многочлена или вычитаем из одного многочлена другой, опять получаем сумму одночленов. Значит, **сумма и разность двух многочленов являются многочленами.**

Сложить два многочлена — это значит представить их сумму в стандартном виде.

Вычесть из одного многочлена другой — это значит представить их разность в стандартном виде.

Пример 1. Найти сумму многочленов

$$5ab^2 - 9a\frac{b}{3} + 7b \text{ и } 3a \cdot 4b^2 + 2b(5a - 2) - 10.$$

Решение.

$$(5ab^2 - 9a\frac{b}{3} + 7b) + (3a \cdot 4b^2 + 2b(5a - 2) - 10) = \\ = \underline{5ab^2} - \underline{3ab} + \underline{7b} + \underline{12ab^2} + \underline{10ab} - \underline{4b} - 10 = \\ = 17ab^2 + 7ab + 3b - 10.$$

Пример 2. Найти разность многочленов

$$7x^3x^2 + 3x \cdot 2x^2 + 8 \text{ и } 5 - 3x(2x^2 - x).$$

Решение.

$$(7x^3x^2 + 3x \cdot 2x^2 + 8) - (5 - 3x(2x^2 - x)) = \\ = 7x^5 + \underline{6x^3} + \underline{8} - \underline{5} + \underline{6x^3} - 3x^2 = 7x^5 + 12x^3 - 3x^2 + 3.$$

Пример 3. Сложить многочлены

$$3a - 8b + 5c \text{ и } -3a + 8b - 5c.$$

$$\text{Решение. } \underline{3a} - \underline{8b} + \underline{5c} - \underline{3a} + \underline{8b} - \underline{5c} = 0.$$

Два многочлена, сумма которых равна нулю, называются **противоположными многочленами.**



1. Может ли сумма двух многочленов быть одночленом? Двучленом? Трехчленом? Нулевым многочленом?
2. Что значит сложить два многочлена?
3. Что значит из одного многочлена вычесть другой?
4. Какие два многочлена называются противоположными?
5. Может ли сумма одночленов быть одночленом?

Упражнения

3.34. Найдите сумму многочленов:

- 1) $4x - 1$ и $5 - 3x$;
- 2) $2x - 2$ и $-x - 1$;
- 3) $3at^4$ и $-3at^4$;
- 4) $-4x^2a$ и $-4x^2a$;
- 5) $-5xyz$ и $-5xyz$;
- 6) $-6\frac{2}{3}m^2n$ и $6\frac{2}{3}m^2n$;
- 7) $2b^2 + 7a^2 - 5ab$ и $-5a^2 + 11ab - 8b^2$;
- 8) $a^2b - ab^2 + 3a^2$, $4a^3 + ab^2$ и $a^2b - 1$.

3.35°. Запишите сумму одночленов и приведите подобные члены:

- 1) m ; $-2m$; $-\frac{1}{2}m$; $-3m$; $2m$; $1,5m$;
- 2) $8a^2$; $3a^2$; $-4,9a^2$; $-11a^2$; $4,9a^2$; $-5a^2$;
- 3) $12a^2b^2$; $10a^2b^2$; $-24a^2b^2$; $-20aabb$;
- 4) x^2y ; $\frac{1}{3}x^2y$; $-1\frac{1}{4}x^2y$; xxu .

Найдите разность многочленов (**3.36—3.38**).

- 3.36.**
- 1) z и $y - z$;
 - 2) $2c$ и $-b + c$;
 - 3) c и $-a - c$;
 - 4) $-z$ и $y - z$;
 - 5) 2 и $y - 3$;
 - 6) 5 и $y + 5$;
 - 7) -5 и $y - 5$;
 - 8) -5 и $-y + 5$;
 - 9) b^2 и $a^2 + b^2$;
 - 10) b^2 и $-a^2 + b^2$.

- 3.37.**
- 1) $-b^2$ и $a^2 - b^2$;
 - 2) $-b^2$ и $a^2 + b^2$;
 - 3) x^2 и $3ax - x^2$;
 - 4) x^2 и $-3ax + x^2$;

5) $-x^2$ и $3ax + x^2$; 6) x^2 и $3ax + x^2$;

7) $\frac{5}{6}a + \frac{1}{2}$ и $\frac{2}{3}a - \frac{1}{6}$;

8) $\frac{5}{6}x - \frac{1}{4}$ и $-\frac{2}{3}x + \frac{1}{6}$;

9) $-\frac{5}{6}a - \frac{1}{4}$ и $-\frac{2}{3}a - \frac{1}{6}$;

10) $-\frac{5}{6}x + \frac{1}{4}$ и $-\frac{2}{3}x - \frac{1}{6}$.

3.38. 1) $5y^3$ и $4y^3 + 8y$; 2) $1,8x^2$ и $0,5x^2 - 1,2x$;

3) $3b - 2x$ и $6b + 3x$;

4) $0,1a - 1,8a^2$ и $0,8a - 0,6a^2$;

5) $1\frac{1}{8}c^2 + \frac{3}{5}c$ и $2\frac{3}{8}c^2 - 1\frac{2}{5}c$;

6) $2\frac{1}{3}y^3 - y$ и $-1\frac{2}{3}y^3 + 4y$.

3.39. Преобразуйте выражение в многочлен стандартного вида:

1) $12x^2 - 8ax + 8x - (21x^2 - 4ax + 7x)$;

2) $19ac + 23bc + 27b^2 - (14ac + 9bc - 4b^2)$;

3) $32a + 31az + 14a^2z - (17a^2z - 13az + 31a)$;

4) $17x^2 + 9y^2 + 6z^2 - (4y^2 + 6z^2 - 12x^2)$;

5) $3abc - 14bc + 19a + (7abc + 12bc - 9a) - (9a + 3bc)$;

6) $11y^2 + 15x^2y^2 + 4x^2y^2 + (4y^2 - 6x^2y^2) - (7x^2y^2 + 4x^2y^2)$.

3.40°. Раскройте скобки и приведите подобные члены:

1) $-a^2b - (-a^2b + b^4)$;

2) $-x^2y - (3x^2y - y^2)$;

3) $-\left(\frac{5}{6}b - \frac{3}{4}a\right) + \left(-\frac{1}{2}b + \frac{1}{8}a\right)$;

4) $-\left(\frac{3}{8}x + \frac{2}{7}y\right) + \left(\frac{1}{14}y - \frac{1}{2}x\right)$;

5) $(3x^4 - 2x^2b + 4x^2y^2 - 2xy^3) - (-3x^4 + 6x^2b - 7x^2y^2 + 3xy^3)$;

6) $(a^3 - 2ax^2 - bx^2 + 3cx) - (-7a^3 - 6ax^2 - 15bx^2 + 7cx)$.

3.6. Умножение многочлена на одночлен

Запишем произведение многочлена $3x^2y - 2xy + y^2$ и одночлена $-5xy^2$. Воспользовавшись распределительным законом, раскроем скобки. Затем каждое слагаемое представим в стандартном виде:

$$\begin{aligned} & (3x^2y - 2xy + y^2)(-5xy^2) = \\ & = 3x^2y(-5xy^2) + (-2xy)(-5xy^2) + y^2(-5xy^2) = \\ & = -15x^3y^3 + 10x^2y^3 - 5xy^4. \end{aligned}$$

Многочлен — это сумма одночленов. Когда мы сумму одночленов умножаем на одночлен, опять получаем сумму одночленов. Значит, **произведение многочлена и одночлена является многочленом.**

Умножить многочлен на одночлен (или одночлен на многочлен) — это значит каждый член многочлена умножить на этот одночлен и полученные одночлены сложить.

Пример 1. Умножить одночлен $-9p^3x^2$ на многочлен $3x^2 + 7p^2x - 9p^4$.

$$\begin{aligned} \text{Решение.} \quad & (-9p^3x^2)(3x^2 + 7p^2x - 9p^4) = \\ & = (-9p^3x^2) 3x^2 + (-9p^3x^2) 7p^2x + (-9p^3x^2)(-9p^4) = \\ & = -27p^3x^4 - 63p^5x^3 + 81p^7x^2. \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } -27p^3x^4 - 63p^5x^3 + 81p^7x^2.$$

▲ **Пример 2.** Преобразовать в многочлен стандартного вида выражение

$$A = (7m^{3k-1}p - 2m^{3k+2}p^k) 3m^k + 7p^{3k}.$$

Решение.

$$A = 7m^{3k-1}p \cdot 3m^k + 7p^{3k} - 2m^{3k+2}p^k \cdot 3m^k + 7p^{3k} =$$

↓ по правилу умножения степеней с одинаковыми основаниями получим ↓

$$\begin{aligned}
 &= 21m^{3k-1+(k+7)}p^{1+3k} - 6m^{3k+2+(k+7)}p^{k+3k} = \\
 &= 21m^{4k+6}p^{1+3k} - 6m^{4k+9}p^{4k}.
 \end{aligned}$$

Ответ: $A = 21m^{4k+6}p^{1+3k} - 6m^{4k+9}p^{4k}$. ▲

Пример 3. Преобразовать выражение

$$B = (-8xy^2 + 3x^2y - xy + 5)(-2xy^2)$$

в многочлен стандартного вида и определить его степень n .

Решение.

$$\begin{aligned}
 B &= -8xy^2(-2xy^2) + 3x^2y(-2xy^2) - xy(-2xy^2) + 5(-2xy^2) = \\
 &= 16x^2y^4 - 6x^3y^3 + 2x^2y^3 - 10xy^2.
 \end{aligned}$$

Степень многочлена $n = 6$, так как $6 = 2 + 4 = 3 + 3$ — наибольшая сумма показателей степеней переменных x и y в этом многочлене.

Ответ: $B = 16x^2y^4 - 6x^3y^3 + 2x^2y^3 - 10xy^2$; $n = 6$.



1. Что значит умножить многочлен на одночлен?
2. Можно ли при умножении многочлена на одночлен получить нуль? Единицу? Приведите примеры.

Упражнения

Умножьте многочлен на одночлен (3.41—3.42).

- 3.41°. 1) $(c + d)a$; 2) $(c - d)k$;
 3) $(2a - 3b)y$; 4) $(-6x + 9y)b$;
 5) $6a(3a - b)$; 6) $3m(m - 8n)$;
 7) $-3x(y - x)$; 8) $-4a(-a + b)$.
- 3.42°. 1) $(2b + 3c + 4d)(-4)$; 2) $(3m^2 + 2m - n)3$;
 3) $(3c^2 + 4c^3 - c)5$; 4) $(x - 7y - 8p)(-2)$;
 5) $(4m^2 - 3m + 5)(-3m)$; 6) $(y^2 + y - 3)(-7y)$;
 7) $(-6y^2 - 6y - 3)\left(-\frac{1}{3}y\right)$;
 8) $(-8c^2 - 16c - 24)\left(-\frac{3}{8}c\right)$.

Преобразуйте выражение в многочлен стандартного вида и определите степень полученного многочлена (3.43—3.46).

3.43°. 1) $(-8y^2 - 4ay + a^2)(-5ay)$;

2) $(13m^2 - 9mn - 8n^2)(-2mn)$;

3) $(-3c^2 - 8cb - 5b^2)(-6cb)$;

4) $(6x^2 + 2x^2y^2 - 4xy^2 - 3y^3)(-3xy)$;

5) $(-4by^2 - 3b^2y^2 + 4by^3 - 5y^3)(-4by)$;

6) $(2abc - 3a^2b^2c^2 - 7a^2bc)(-6abc)$;

7) $(4a^2b - 2ab^2 + b^3)(3a^2b^2)$;

8) $(7a^3b + 5a^2b^2 - ab^3)(7a^3b^2)$.

3.44. 1) $(2c^4 - 1,5bc + 2,15b^2c^2)(-0,4bc^2)$;

2) $(2,25y^3 - 1,5ay + 2,5a^2y)(-2,4ay^2)$;

3) $\left(-1\frac{1}{3}c^2d\right)\left(\frac{3}{4}cd^2 - 1\frac{1}{2}c^2d - \frac{5}{6}cd^3\right)$;

4) $\left(-\frac{4}{9}a^2y\right)\left(\frac{1}{3}ay - \frac{1}{2}a^2y + \frac{2}{3}a^2y^2\right)$;

5) $(-5b^2 + 3bc^3 - 2bc)\left(-\frac{1}{4}b^2c^2\right)$;

6) $(-2a^2b^2 + 5ab^3 - 7b^2)\left(-\frac{1}{2}a^2b^2\right)$;

7) $\left(-\frac{3}{2}a^3x^3\right)(-2a^2x + 6a^3x^3 + 3ax^2)$;

8) $\left(-\frac{4}{3}ab^2\right)\left(\frac{3}{5}a^2b^2 - \frac{3}{2}a^2b + \frac{3}{4}ab^2\right)$;

9) $\left(1\frac{4}{7}x^3y^2 - 3\frac{5}{13}x^2y^3 - 22xy^4\right)\left(-3\frac{6}{11}xy^6\right)$;

10) $\left(-3\frac{1}{9}a^6y - 3\frac{1}{5}a^3y^2 - 12ay^5\right)\left(-3\frac{3}{4}a^4y^5\right)$.

3.45. 1) $(-3a^2)(-2a^3 + 9a^2 - 2a) + (-7a^2 - a + 2)(-2a^3)$;

2) $(-6m^2)(-3m^2 + 4m^3 + 5m) + (3 - 6m^2 - 4m)(-3m^3)$;

3) $12b^2 - (b - 2a)3b + 4b(2b - 2a) - 7bb$;

4) $4p^2(p - 2) - 3pp - 7ppp - (p^3 - 3p)$.

- 3.46. 1) $5m(m+n) - (3m-n)n + 2n(n-m)$;
2) $6n(m-n) + 3n(2m-n) - (6m-n)n$;
3) $7p(t+p) + 4t(3t-2p) - (5p-4t)t$;
4) $8p(2t-3p) - (5p-t)p + 4t(2t-3p)$.

Решите уравнение (3.47—3.48).

- 3.47. 1) $4x(3x+1) - 3x(4x-1) = 14$;
2) $5x(2x-7) - 2x(5x-16) = 21$;
3) $x(8x-5) - 2x(4x+3) = 13$;
4) $2x(2x+9) - x(4x+5) = 39$.

- 3.48. 1) $\frac{x-1}{3} - \frac{x+1}{4} = 1$; 2) $\frac{x-2}{4} - \frac{x+3}{3} = 1$;
3) $\frac{4x}{5} - \frac{x+4}{2} = 1$; 4) $\frac{x-7}{6} - \frac{5x}{4} = 1$;
5) $\frac{6x-1}{5} - \frac{3x+2}{2} = \frac{2-x}{4}$;
6) $\frac{2x-3}{6} - \frac{x-1}{2} = \frac{4-x}{3}$.

3.49. Преобразуйте в многочлен стандартного вида:

- 1) $(b^k + 2b^2)b^{k+2}$;
2) $(4y^{k-2} - 3y^k)5y^{1+2k}$;
3) $8a^{p-1}\left(\frac{1}{2}a^{p+2} + \frac{3}{4}a\right)$;
4) $-2a^xb^4\left(-\frac{1}{3}a^{3+x} - \frac{1}{2}b\right)$;
5) $(2a^n - 4a^{n-1} - 3a^{n+2})(-5a^{n+4})$;
6) $(6a^{n+1} - 12a^{n+2} - 4a^{n+3})(-3a^{n+3})$;
7) $(3a^nb^4 - 2a^{n+1}b + 4a^{n+2}b^2)(-2a^{n+1}b^3)$;
8) $(5a^2b^{n+2} - 3ab^{n+4} - 6a^3b^{n+5})(-4a^2b^{n+2})$.

3.7. Умножение многочлена на многочлен

Пусть нам надо найти произведение $(a+b)(m+k)$.
Обозначив второй множитель буквой u , получим:

$$(a+b)u = au + bu =$$

$$\begin{aligned}
 &\downarrow \text{ вместо } u \text{ подставим } m + k \downarrow \\
 &= a(m + k) + b(m + k) = \\
 &\downarrow \text{ раскроем скобки } \downarrow \\
 &= am + ak + bm + bk.
 \end{aligned}$$

Таким образом,

$$(a + b)(m + k) = am + ak + bm + bk.$$

Если присмотреться к правой части этого равенства, то нетрудно заметить, что стоящая в ней сумма получается в результате умножения **каждого** члена многочлена $a + b$ на **каждый** член многочлена $m + k$.

Многочлен — это сумма **одночленов**. Когда мы сумму одночленов умножаем на сумму одночленов, то после раскрытия скобок опять получаем сумму одночленов. Значит, **произведение многочлена и многочлена является многочленом**.

Умножить многочлен на многочлен — это значит **каждый член одного** многочлена умножить на **каждый член другого** многочлена и полученные **одночлены сложить**.

Пример 1. Преобразовать выражение

$$(3x^2 - 2x)(5p - 7t^2)$$

в многочлен стандартного вида.

Решение. $(3x^2 - 2x)(5p - 7t^2) =$

$\downarrow$ по правилу умножения многочленов получим $\downarrow$

$$= 3x^2 \cdot 5p + (-2x)5p + 3x^2(-7t^2) + (-2x)(-7t^2) =$$

$\uparrow$ при умножении двух двучленов получили $\uparrow$
4 слагаемых-одночлена

$\downarrow$ приведем одночлены к стандартному виду $\downarrow$

$$= 15px^2 - 10px - 21t^2x^2 + 14t^2x.$$

Пример 2. Найти произведение многочленов

$$3x + 4 \text{ и } 5c - 2b + 6.$$

Решение. $(3x + 4)(5c - 2b + 6) =$

↓ при умножении двучлена на трехчлен ↓
↓ получили 6 слагаемых-одночленов ↓

$$= 3x \cdot 5c + 4 \cdot 5c + 3x(-2b) + 4(-2b) + 3x \cdot 6 + 4 \cdot 6 =$$

↓ приведем одночлены к стандартному виду ↓

$$= 15cx + 20c - 6bx - 8b + 18x + 24.$$

Пример 3. Найти произведение многочленов

$$x^3 - 4x^2 - 3x + 7 \text{ и } x^2 - 3x + 1.$$

Решение. $(x^3 - 4x^2 - 3x + 7)(x^2 - 3x + 1) =$

↓ по правилу умножения многочленов получим ↓

$$= x^3x^2 - 4x^2x^2 - 3xx^2 + 7x^2 + x^3(-3x) - 4x^2(-3x) - \\ - 3x(-3x) + 7(-3x) + x^3 - 4x^2 - 3x + 7 =$$

↑ в первом множителе было 4 слагаемых, ↑
↑ во втором — 3, в их произведении ↑
получили 12 одночленов

↓ приведем одночлены к стандартному виду ↓
и выделим подобные члены ↓

$$= x^5 - \underline{4x^4} - \underline{3x^3} + \underline{7x^2} - \underline{3x^4} + \underline{12x^3} + \underline{9x^2} - \underline{21x} + \\ + \underline{x^3} - \underline{4x^2} - \underline{3x} + 7 =$$

↓ приведем подобные члены ↓

$$= x^5 - 7x^4 + 10x^3 + 12x^2 - 24x + 7.$$



1. Что значит умножить многочлен на многочлен?
2. Может ли произведение многочленов быть одночленом? Двучленом?
3. Сколько одночленов должно получиться при умножении трехчлена на двучлен до приведения подобных?

Упражнения

3.50°. Преобразуйте выражение в многочлен стандартного вида:

- | | |
|-----------------------------|------------------------------|
| 1) $A = (x + y)(m - n)$; | 2) $K = (x - y)(m + n)$; |
| 3) $B = (k + l)(k + 5)$; | 4) $L = (k - l)(k + 3)$; |
| 5) $C = (3 - k)(k + 4)$; | 6) $M = (k + 2)(k - 7)$; |
| 7) $D = (3y + 2)(2y - 1)$; | 8) $N = (5y - 1)(2y + 4)$; |
| 9) $E = (2b - 3)(3b - 2)$; | 10) $F = (4 - 3b)(5 + 2b)$. |

Выполните умножение (3.51—3.52).

- 3.51°.** 1) $(6x - 2a)(4a - 3x)$; 2) $(7m - 5n)(m - n)$;
3) $(3b - 2c)(5b + 4c)$; 4) $(2b - c)(9b - 5c)$;
5) $(9m^2 - 3)(2m^2 + 1)$; 6) $(6n^2 + 2)(4n^2 - 3)$;
7) $(-8b^2 - 4a^2)(3a^2 - 2b^2)$;
8) $(-7y^2 - 4x^2)(-x^2 + 2y^2)$;
9) $(5m^2 - 3mn)(3m^2 - mn)$;
10) $(6ax - 2a^2)(2ax - 3a^2)$.

- 3.52.** 1) $\left(\frac{1}{3}a + \frac{1}{4}y\right)\left(\frac{1}{2}a - \frac{1}{5}y\right)$;
2) $\left(\frac{1}{2}c - \frac{1}{3}b\right)\left(\frac{1}{4}c + \frac{1}{2}b\right)$;
3) $\left(-\frac{1}{3}m - \frac{1}{2}n\right)\left(\frac{1}{2}m - \frac{2}{3}n\right)$;
4) $\left(-\frac{1}{5}p - \frac{1}{2}t\right)\left(\frac{1}{2}p - \frac{2}{5}t\right)$.

Преобразуйте выражение в многочлен стандартного вида и определите его степень (3.53—3.56).

- 3.53.** 1) $(a^2 + ab + b^2)(a - b)$;
2) $(m^2 - mn + n^2)(m + n)$;
3) $(d^2 + 6dp - 2p^2)(p - d)$;
4) $(y^2 + 5y + 2)(y - 6)$;
5) $(z^3 - z^2 + z - 1)(z - 1)$;

6) $(y^3 + 2y^2 - y + 2)(y + 1);$

7) $(m^2 + 3mn - 4n^2)(7m^2 - 6n);$

8) $(y^2 - 2ay + 5a^2)(2ay - 3a^2).$

3.54°. 1) $(a^3 + a^2b - ab^2 - b^3)(a + b);$

2) $(m^3 - m^2n - mn^2 - n^3)(m - n);$

3) $(a^2 - 3ab^2 - 8a^2b - 2b^2)(4a - 3b);$

4) $(m^2 - 3m^2n + 2mn^2 + 8n^3)(3m + 5n);$

5) $(p^3 + 3p^2 + 2p - 5)(p^2 - 2p + 8);$

6) $(4p^4 + 2p^3 - 3p^2 - 2p + 6)(p^2 - 3p + 1);$

7) $(m + 3n)(m + 3n);$

8) $(2k + 3m)(2k - 3m);$

9) $(3p - 4k)(3p + 4k);$

10) $(2t + 5p)(5p - 2t).$

3.55. 1) $(2 + 1,2y + 0,24x^2)(2y - 1,5x);$

2) $(3 - 0,9m + 0,06n)(4n - 1,6m);$

3) $(0,7b^2 - 0,3bc + 0,15c^2)(2,4b - 0,2c);$

4) $(1,4a^2 + 0,2c^2 - 3,1ac)(0,8a - 0,2c);$

5) $(2a - b)(4a^2 + 2ab + b^2);$

6) $(3p + t)(9p^2 - 3pt + t^2).$

3.56. 1) $(m - n)(m - n)(m - 2);$

2) $(-x - y)(x - y)(-y + 1);$

3) $(-m - n)(-m - n)(1 - n);$

4) $(t - k)(-t - k)(2 - k);$

5) $(k + p)(k + p)(k^2 + p^2);$

6) $(m + n)(m - n)(m^2 + n^2);$

7) $(m + n)(m + n)(m + n);$

8) $(a - c)(a - c)(a - c).$

3.57. Используя выражения из упражнения 3.50, преобразуйте в многочлен стандартного вида:

1) $A + K;$ 2) $K - A;$ 3) $B - L;$ 4) $B + L;$

5) $C - M;$ 6) $M + C;$ 7) $N + D;$ 8) $N - D;$

9) $F - E;$ 10) $E + F.$

3.58. Решите уравнение:

- 1) $(2x - 7)(3x + 4) + 7 = (6x - 1)(x + 2)$;
- 2) $(5x + 2)(2x - 3) - 4 = (x - 2)(10x - 1)$;
- 3) $(3x + 1)(4x - 3) = (2x + 5)(6x - 2) - 2$;
- 4) $(4x - 7)(5x + 1) = (10x - 3)(2x + 4) + 5$.

3.59. Изобразите график функции:

- 1) $y = x(x + 4) - (x - 2)(x + 2)$;
- 2) $y = (x + 3)(x - 3) - (x - 2)(x + 1)$;
- 3) $y = (x - 5)(x + 1) + (x + 2)(6 - x)$;
- 4) $y = (x + 1)(x - 7) + (x - 4)(2 - x)$.

3.60. 1) Длина прямоугольника в 3,5 раза больше его ширины. Если длину увеличить на 6 см, а ширину уменьшить на 2 см, то площадь прямоугольника уменьшится на 16 см^2 . Найдите периметр исходного прямоугольника.

2) Длина прямоугольника в 2,5 раза больше его ширины. Если длину уменьшить на 6 см, а ширину увеличить на 5 см, то площадь прямоугольника увеличится на 35 см^2 . Найдите периметр исходного прямоугольника.

3.8. Деление многочлена на одночлен

Рассмотрим выражение $(-68a^4by^2z^7) : a^3$.

Чтобы разделить произведение $-68a^4by^2z^7$ на a^3 , достаточно разделить на a^3 один из его множителей; здесь такой множитель a^4 :

$$(-68a^4by^2z^7) : a^3 = -68aby^2z^7.$$

Результат деления можно проверить умножением:

$$-68aby^2z^7 \cdot a^3 = -68a^4by^2z^7.$$

Более сложный пример деления одночлена на одночлен:

$$(-68a^4by^2z^7) : (4a^3bz^5).$$

Чтобы разделить одночлен $-68a^4by^2z^7$ на произведение $4a^3bz^5$, следует разделить его на первый множитель 4, затем полученное частное — на a^3 , затем полученное частное — на b и, наконец, полученное частное — на z^5 :

$$(-68a^4by^2z^7) : (4a^3bz^5) = -17ay^2z^2.$$

И в этом примере результат деления можно проверить умножением (сделайте это). Мы смогли здесь выполнить деление потому, что



каждая переменная, входящая в делитель, входит и в делимое, причем с показателем степени, не меньшим, чем в делителе. Это и есть **условие делимости одночленов**, т. е. условие того, что частное от деления одночленов есть одночлен.

Например, чтобы разделить на одночлен $6axy^2$ многочлен $5a^2x^2y^3 - 3a^2xy^4 + 2axy^3$, нужно разделить на $6axy^2$ каждый его член, а затем полученные частные сложить. Поэтому:

$$\begin{aligned} & (5a^2x^2y^3 - 3a^2xy^4 + 2axy^3) : (6axy^2) = \\ & = (5a^2x^2y^3) : (6axy^2) - (3a^2xy^4) : (6axy^2) + (2axy^3) : (6axy^2) = \\ & = \frac{5}{6}axy - \frac{1}{2}ay^2 + \frac{1}{3}y. \end{aligned}$$

Результат деления можно проверить умножением:

$$\left(\frac{5}{6}axy - \frac{1}{2}ay^2 + \frac{1}{3}y\right)6axy^2 = 5a^2x^2y^3 - 3a^2xy^4 + 2axy^3.$$



Мы видим, что **многочлен, записанный в стандартном виде, делится на одночлен при условии, что каждый его член делится на этот одночлен.** Если это условие выполняется, то для деления многочлена на одночлен надо каждый член многочлена разделить на этот одночлен и полученные частные сложить.

Пример 1. Разделить на одночлен ab^2 многочлен $3a^2b^3 - 18ab^5 + ab^2$.

Решение.

$$(3a^2b^3 - 18ab^5 + ab^2) : (ab^2) = 3ab - 18b^3 + 1.$$

▲ **Пример 2.** Решить уравнение

$$42y - 48y^3 : (4y^2) = 30.$$

Решение. Здесь $y \neq 0$, поскольку деление на 0 невозможно. После деления $48y^3$ на $4y^2$ данное уравнение примет вид $42y - 12y = 30$, откуда $30y = 30$, т. е. $y = 1$.

Ответ: 1.

Пример 3. Решить уравнение $5y - 3y^2 : y = 0$.

Решение. Здесь $y \neq 0$, поскольку деление на 0 невозможно. После деления $3y^2$ на y данное уравнение примет вид $5y - 3y = 0$.

Решив его, получим $y = 0$, а это значение y не может быть корнем исходного уравнения.

Ответ: корней нет.

Пример 4. Решить уравнение

$$(x^2 - 3x)(4x - 3x^2 : x + 5) = 0.$$

Решение. Значение x будет корнем данного уравнения, если оно, во-первых, будет отличным от нуля ($x \neq 0$, так как деление на 0 невозможно) и, во-вторых, будет корнем хотя бы одного из двух уравнений:

$$x^2 - 3x = 0 \tag{1}$$

или

$$4x - 3x^2 : x + 5 = 0. \tag{2}$$

Решив уравнение (1), получим:

$$x = 0 \text{ или } x = 3.$$

Решив уравнение (2), получим:

$$x + 5 = 0, \text{ откуда } x = -5.$$

С учетом условия $x \neq 0$ получим: $x_1 = -5$, $x_2 = 3$.

Ответ: -5 ; 3 . ▲



1. При каких условиях одночлен можно разделить на одночлен?
2. Как проверить результат деления одночлена на одночлен?
3. При каких условиях многочлен стандартного вида можно разделить на одночлен?
4. Сколько членов получается в частном при делении многочлена на одночлен?

Упражнения

3.61. Разделите одночлен на одночлен:

- 1) $(3a^3bc) : a^2$;
- 2) $(3a^3bc^5) : c^2$;
- 3) $(0,25dt^4m^2n) : (5t^3m^2)$;
- 4) $(0,49m^3n^2t) : (0,21m^3n)$;
- 5) $(6,5a^2b^3) : (5a^2b)$;
- 6) $(0,01cd^2m^4) : (0,1cmd^2)$;
- 7) $(0,3x^2yz^5) : (3x^2yz^3)$;
- 8) $(17xy^2z) : (1,7xy^2z)$;
- 9) $(0,24a^{n-2}b^{n-1}) : (-0,12a^{n-3}b^{n-2})$;
- 10) $(-1,9a^{n+3}b^{n+2}) : (-0,57a^{n+1}b^{n-1})$.

Выполните деление (3.62—3.65).

- 3.62. 1) $(-xy + zy - ky) : (-y)$;
- 2) $(xy - zy - ky) : y$;
- 3) $(mn - mk + mt) : m$;
- 4) $(-mn + mk - mt) : (-m)$;
- 5) $(mn + mt - m) : (-m)$;
- 6) $(mn - mt + m) : m$;

7) $(21x^2 + 14x^3 - 28x^4) : (7x^2);$

8) $(18x^4 - 12x^3 + 6x^2) : (-6x^2).$

3.63. 1) $(y^2b^4 + yb^2) : (yb);$

2) $(3a^2b + 2ab^3) : (ab);$

3) $(12n^4k^5 - 15n^2k^3) : (3n^2k^2);$

4) $(4a^5b^2 - 8a^6b^3) : (2a^4b^2);$

5) $(0,9m^8n^6 - 0,81m^3n^7) : (0,3m^3n^3);$

6) $(3,9m^4n^8t^2 + 2,6m^2n^5t^3) : (1,3n^4t^2).$

3.64. 1) $(-18x^2y^2z - 9xyz + 45xy^2z^4t) : (9xyz);$

2) $(a^3b^3y^2 + 2a^2b^2y - 5ab^2y^2z^4) : (aby);$

3) $(-49a^3b + 70a^2b - 35a^2b^2) : (-7a^2b);$

4) $(64x^4y^3 - 8x^3y^4 + 4x^2y^3) : (-8x^2y^3);$

5) $(-4x^3y^2 + 6x^2y^3 - 12x^3y^5) : \left(-\frac{3}{4}xy\right);$

6) $\left(6a^4b^2 - \frac{2}{3}a^3b^5 + \frac{1}{7}a^2b^6\right) : \left(-\frac{4}{7}a^2b^2\right);$

7) $(6a^2b - 9ab + 3a^2b^2) : (9ab);$

8) $(9x^3y^4 - 4x^8y^5 - 8x^2y^2) : (8x^2y^2);$

9) $(0,02x^3 - 0,03x^5 + 0,04x^2) : (0,01x^2);$

10) $(-0,003a^6 - 0,0004a^5 - 0,005a^3) : (-0,001a^3).$

3.65. 1) $(18a^2x^3y^2 - 12a^3x^2y^2 + a^2x^2y^3) : (-0,2a^2x^2y^2);$

2) $(24x^3y^5z^2 - 1,8x^2y^4z^6 - 0,6x^2y^2z^2) : (-0,6x^2y^2z^2);$

3) $(10,8am^2n^3 - 9,6a^3m^2n^4 - 12a^2m^3n^5) : (12amn^3);$

4) $(5,6c^3n^3t^3 - 84c^4n^3t^4 - 14c^5n^3t^5) : (14c^3n^3t^3);$

5) $(72a^5x^6z^3 - 3,6a^4x^3z^4 - 1,8a^7x^4z^3) : (3,6a^4x^3z^3);$

6) $(4,5a^3b^5x^7 - 0,3a^5b^7x^3 - 1,5a^7b^3x^5) : (1,5a^3b^3x^3);$

7) $\left(-4m^5n^2p^6 - \frac{4}{9}m^4n^5p^3 + \frac{2}{3}m^3n^6p^7\right) : \left(\frac{2}{3}m^3n^2p\right);$

8) $\left(\frac{3}{4}m^6n^3p^5 + \frac{5}{6}m^3n^4p^2 - \frac{9}{10}mn^5p^4\right) : \left(\frac{3}{5}mn^3p^2\right).$

3.66. Найдите значение выражения:

1) $(4n^5 - 6n^3) : (-2n^2) - (35n^7 - 21n^5) : (-7n^4)$ при $n = -2;$

$$2) (12n^9 + 36n^7) : (-6n^6) - (64n^5 - 40n^3) : (-8n^2)$$

при $n = -3$;

$$3) (81n^7 - 45n^8) : (-9n^6) - (34n^5 - 51n^6) : (-17n^4)$$

при $n = -4$;

$$4) (36n^6 - 48n^7) : (-12n^5) - (48n^7 - 72n^8) : (-8n^6)$$

при $n = -5$.

Решите уравнение (3.67—3.69).

3.67*. 1) $9x^2 : (18x) - 5x = 0$; 2) $7x - 3x^2 : (6x) = 0$;
3) $13x + 10x^2 : (5x) = 0$; 4) $15x^2 : (3x) - 10x = 0$.

3.68*. 1) $18x^2 : (9x) = 4$;
2) $21y^3 : (7y^2) = 9$;
3) $24x^3 : (6x^2) - 16 + x = 4$;
4) $9y + 3 - 20y^3 : (10y^2) = -11$;
5) $(4a^3 - 12a^2) : (2a^2) = 10 - 6a$;
6) $(15x^5 - 10x^4) : (5x^4) = 13$;
7) $(8x^3 - 4x^2) : (4x^2) + (21x^4 - 7x^3) : (-7x^3) = 23$;
8) $(16x^4 - 32x^3) : (8x^3) +$
 $+ (125x^8 - 100x^7) : (-25x^7) = 15$.

3.69*. 1) $(18x^2 : (9x) - 3x + 5)(x^2 - x) = 0$;
2) $(4x + 16x^2 : (8x) - 6)(2x^2 + x) = 0$;
3) $(x - 3x^2)(8x - 10x^2 : (2x) + 6) = 0$;
4) $(x + 4x^2)(18x^2 : (3x) - 4x + 4) = 0$.

Глава 4

ФОРМУЛЫ СОКРАЩЕННОГО УМНОЖЕНИЯ

4.1. Квадрат суммы и квадрат разности

В этой главе мы рассмотрим, как с помощью некоторых формул можно упрощать преобразования при умножении многочленов.

Теорема 1. При любых значениях a и b верно равенство

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab. \quad (1)$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}(a + b)^2 &= (a + b)(a + b) = a^2 + ab + ab + b^2 = \\ &= a^2 + b^2 + 2ab. \quad \square\end{aligned}$$

Так как равенство (1) верно при любых значениях a и b , то оно является тождеством. Это тождество называется **формулой квадрата суммы**. Если в эту формулу вместо a и b подставить какие-нибудь выражения, то опять получится тождество. Поэтому формула квадрата суммы читается так:



квадрат суммы двух выражений равен сумме квадратов этих выражений плюс удвоенное произведение первого и второго выражений.

Эта формулировка показана в виде схемы на рисунке 48.

$$(\square + \triangle)^2 = \square^2 + \triangle^2 + 2 \cdot \square \cdot \triangle$$

Рис. 48

На рисунке 49 для положительных a и b дана геометрическая иллюстрация формулы (1).

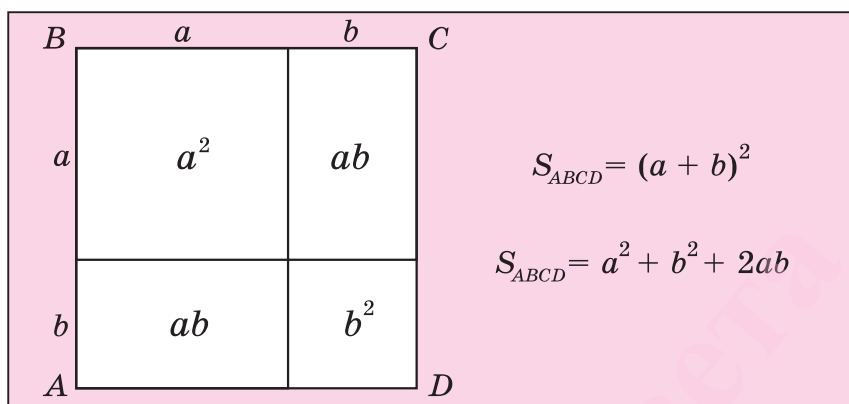


Рис. 49

Теорема 2. При любых значениях a и b верно равенство

$$(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab. \quad (2)$$

Доказательство проведите самостоятельно.

Так как равенство (2) верно при любых значениях a и b , то оно является тождеством. Это тождество называется **формулой квадрата разности**. Если в эту формулу вместо a и b подставить какие-нибудь выражения, то опять получится тождество. Поэтому формула квадрата разности читается так:



квадрат разности двух выражений равен сумме квадратов этих выражений минус удвоенное произведение первого и второго выражений.

Эта формулировка показана в виде схемы на рисунке 50.

$$(\square - \triangle)^2 = \square^2 + \triangle^2 - 2 \cdot \square \cdot \triangle$$

Рис. 50

Заметим, что формулы (1) и (2) часто записывают и в таком виде:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2; \quad (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Пример 1. Раскрыть скобки, пользуясь формулой квадрата разности:

а) $(c - 5)^2$; б) $(2y - 5p)^2$.

Решение. По формуле квадрата разности имеем:

а) $(c - 5)^2 = c^2 + 5^2 - 2c \cdot 5 = c^2 + 25 - 10c = c^2 - 10c + 25$;

б) $(2y - 5p)^2 = 4y^2 + 25p^2 - 2 \cdot 2y \cdot 5p = 4y^2 + 25p^2 - 20py$.

Пример 2. Вычислить значение выражения, применив формулу квадрата суммы или разности:

а) 107^2 ; б) 999^2 .

Решение.

а) $107^2 = (100 + 7)^2 = 100^2 + 7^2 + 2 \cdot 100 \cdot 7 = 10\,000 + 49 + 1400 = 11\,449$;

б) $999^2 = (1000 - 1)^2 = 1000^2 + 1^2 - 2 \cdot 1000 \cdot 1 = 1\,000\,000 + 1 - 2000 = 998\,000 + 1 = 998\,001$.

Пример 3. Преобразовать выражение в многочлен стандартного вида:

а) $3(4k - 2)^2 - 2(-3k - 1)^2$;

б) $(y - 1)^2 - 2(y - 1)(y + 3) + (y + 3)^2$.

Решение.

а) $3(4k - 2)^2 - 2(-3k - 1)^2 = 3(4k - 2)^2 - 2(-1)^2(3k + 1)^2 = 3(16k^2 + 4 - 2 \cdot 4k \cdot 2) - 2(9k^2 + 1 + 2 \cdot 3k \cdot 1) = 48k^2 + 12 - 48k - 18k^2 - 2 - 12k = 30k^2 - 60k + 10$;

б) $(y - 1)^2 - 2(y - 1)(y + 3) + (y + 3)^2 =$

↑ здесь записана формула квадрата разности ↑
для двух выражений: $(y - 1)$ и $(y + 3)$

$$= ((y - 1) - (y + 3))^2 = (y - 1 - y - 3)^2 = (-4)^2 = 16.$$



1. Сформулируйте теорему о квадрате суммы.
2. Как читается формула квадрата суммы?
3. Сформулируйте теорему о квадрате разности.
4. Как читается формула квадрата разности?
5. Отличается ли квадрат суммы двух выражений от суммы квадратов этих выражений?

Упражнения

Преобразуйте выражение в многочлен стандартного вида (4.1—4.7).

- 4.1°. 1) $(m - 3)^2$; 2) $(2 + k)^2$;
3) $(3c - d)^2$; 4) $(2x + 1)^2$;
5) $(p + 0,2)^2$; 6) $(0,3 - m)^2$;
7) $(k + 0,4)^2$; 8) $(k - 0,5)^2$.
- 4.2°. 1) $\left(\frac{2}{3} - a\right)^2$; 2) $\left(\frac{4}{7} + y\right)^2$;
3) $\left(t + \frac{4}{5}\right)^2$; 4) $\left(m - \frac{5}{8}\right)^2$.
- 4.3°. 1) $(7a + 2)^2$; 2) $(4b + 3)^2$;
3) $\left(-6b - \frac{1}{6}a\right)^2$; 4) $(0,5y - 0,2c)^2$;
5) $(6a - 5)^2$; 6) $(-4y - 9)^2$;
7) $\left(\frac{1}{2}k - \frac{1}{3}m\right)^2$; 8) $(10b - 0,2a)^2$.
- 4.4°. 1) $(0,4 - 5a)^2$; 2) $\left(\frac{1}{4}a - 2b\right)^2$;
3) $(3 + 0,1x)^2$; 4) $(11b - 0,6)^2$;
5) $\left(-\frac{1}{8}x - 4b\right)^2$; 6) $(10m + 0,3)^2$;
7) $\left(\frac{p}{2} - 3s\right)^2$; 8) $\left(-\frac{p}{4} - \frac{t}{5}\right)^2$;
9) $\left(\frac{1}{2}x - \frac{2}{3}y\right)^2$; 10) $\left(\frac{4}{7}y + \frac{21}{8}z\right)^2$.
- 4.5°. 1) $(-3ab^2 - 7a^2b^3)^2$; 2) $(-3m^2n^5 + 4m^8n^5)^2$;
3) $(2a^7b - 7a^3b^9)^2$; 4) $(9a^2c - 4a^3c^4)^2$;

$$\begin{array}{ll} 5) \left(2\frac{1}{5}a^9 + 1\frac{1}{3}b^5\right)^2; & 6) \left(-2\frac{3}{7}p^3 - \frac{7}{17}q^4\right)^2; \\ 7) \left(\frac{2}{9}a^2 + 0,9b^3\right)^2; & 8) \left(1\frac{2}{3}x^5 + \frac{2}{5}y^3\right)^2. \end{array}$$

4.6°. 1) $(a+b)^2 + (a-b)^2$;

2) $(a-b)^2 - (a+b)^2$;

3) $(7x-2)^2 + (4-3x)^2$;

4) $(4+5x)^2 - (9-6x)^2$;

5) $2(m-3n)^2 + (m+6n)^2$;

6) $2(3p+2q)^2 - 3(4p+q)^2$;

7) $-9(2x-5y)^2 - 4(3x+7y)^2$;

8) $-5(4n-7m)^2 - 8(2m-3n)^2$.

4.7°. 1) $3(3p-1)^2 - 2(4p+2)^2 + 5$;

2) $9(1+q)^2 - 6(3q-4)^2 - 4$;

3) $(x+7)^2 - 2(x+7)(x-5) + (x-5)^2$;

4) $(2m-3)^2 + 2(2m-3)(3m-6) + (3m-6)^2$;

5) $5(4b^2+8)^2 + 3(3b^2-4)^2 - 4(2b^2+3)^2$;

6) $4(3b^2+5)^2 - 7(2b^2-1)^2 - 2(4b^2-5)^2$;

7) $3(a^2+1)^2 + 2(a^2-1)(a^2+1) - 5(a^2-1)^2$;

8) $11(y^2-4)^2 + 3(y^2-4)(y^2+5) - 6(y^2+5)^2$.

4.8. Докажите тождество:

1) $(a-b)^2 = (b-a)^2$;

2) $(a+b)^2 = (-a-b)^2$;

3) $(a-b)^2 + (a+b)^2 = 2(b^2+a^2)$;

4) $(a-b)^2 - (a+b)^2 = -4ab$;

5) $a^2+b^2 = (a+b)^2 - 2ab$;

6) $a^2+b^2 = (a-b)^2 + 2ab$;

7) $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ac+2bc+2ab$;

8) $(a-b-c)^2 = a^2+b^2+c^2-2ac+2bc-2ab$.

4.9. Является ли тождеством равенство:

1) $(a+b)^2 = a^2+b^2$;

2) $(a-b)^2 = a^2+b^2$?

4.10. Вычислите, используя формулу квадрата суммы или разности:

- 1) 83^2 ; 2) 68^2 ; 3) 91^2 ; 4) 97^2 ;
5) 994^2 ; 6) 1008^2 ; 7) 203^2 ; 8) 2004^2 .

4.11. Найдите значение выражения:

1) $(p+q)^2 - 2(p-q)(p+q) + (p-q)^2$ при $p = 2\frac{13}{15}$, $q = -4$;

2) $(m-n)^2 + 2(m+n)(m-n) + (m+n)^2$ при $m = -\frac{7}{2}$, $n = 2001$;

3) $(a+b)^2 - 3ab - (a-b)^2$ при $a = -\frac{54}{19}$, $b = \frac{19}{27}$;

4) $(a-b)^2 + 5ab - (a+b)^2$ при $a = \frac{37}{18}$, $b = \frac{72}{37}$;

5) $5(x+y)^2 - 4(x-y)^2 - 18xy$ при $x = 2$, $y = -2$;

6) $-7(m+n)^2 + 9(m-n)^2 + 32mn$ при $m = -4$, $n = 4$.

4.12*. При каком значении m выражение является квадратом двучлена:

1) $(3x+4)^2 + (-6x-2)^2 + (2x-5)^2 + m$;

2) $(3a-8)^2 + (-4a-5)^2 - 12a + m$;

3) $(5x-3)^2 + (4x-5)^2 - 4(2x-1)(4x-3) + m$;

4) $(7y-4)(7y+4) + 2(5y-3)^2 + y^2 + m$?

4.13. Решите уравнение:

1) $(6x+2)^2 + 7x = 4(3x-1)^2 + 55$;

2) $(10x-3)^2 - 8x = 4(5x+3)^2 - 403$;

3) $(2x-3)^2 + (-x-1)^2 = (3x-2)^2 - 4(x+7)^2 - 140x + 4$;

4) $(x-6)^2 + 5(x-3)^2 + 9 = (3x-1)^2 - 3(-x-2)^2 - 19$.

4.14. Докажите тождество:

1) $x(x+4) + (2x-3)^2 = (3x+4)^2 - (-2x-8)^2 + 57$;

2) $(5y-2)^2 - (-3y-7)^2 = (4y-9)^2 + 2(5y-63)$;

3) $(x-1)^2 + (3x+1)^2 + 31 = (2x+3)^2 + 6(x-2)^2 + 16x$;

4) $(2x-1)^2 - (2-x)^2 - 14x = (5-2x)^2 - (x-3)^2 - 19$.

4.15*. Преобразуйте в многочлен стандартного вида:

1) $(a^m + b^n)^2$;

2) $(a^n - b^m)^2$;

3) $(2a^{m+6} - 4b^{n+2})^2$;

4) $(3a^{m+6} + 2b^{n+1})^2$;

5) $(a^{m+1}b^2 + a^{n+2})^2$;

6) $(a^{m+3}b^3 + a^{n+1})^2$;

7) $(11a^{m+3} - 2b^{m+3})^2$;

8) $(-5b^{t+2} - 4a^{t+3})^2$;

9) $\left(-\frac{3}{5}a^{2n+1}b^3 - \frac{2}{3}a^{n+1}b^4\right)^2$;

10) $\left(\frac{5}{6}a^{3n+1}b^2 - \frac{3}{5}a^{2n+2}b^2\right)^2$.

4.2. Разность квадратов

Теорема. При любых значениях a и b верно равенство

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2. \quad (1)$$

Доказательство.

$$(a - b)(a + b) = a^2 + ab - ba - b^2 = a^2 - b^2. \quad \square$$

Так как равенство (1) верно при любых значениях a и b , то оно является тождеством. Это тождество называется **формулой разности квадратов**. Если в эту формулу вместо a и b подставить какие-нибудь выражения, то опять получится тождество. Поэтому формула разности квадратов читается так:



произведение разности двух выражений и их суммы равно разности квадратов этих выражений.

Эта формулировка показана в виде схемы на рисунке 51.

Рис. 51

$$(\square + \triangle)(\square - \triangle) = \square^2 - \triangle^2$$

Пример 1. Упростить выражение $(9 - y)(9 + y)$, применив формулу разности квадратов.

Решение. $(9 - y)(9 + y) = 9^2 - y^2 = 81 - y^2$.

Пример 2. Упростить выражение

$$(-4x + 7p)(4x + 7p).$$

Решение.

$$\begin{aligned}(-4x + 7p)(4x + 7p) &= (7p - 4x)(7p + 4x) = \\ &= (7p)^2 - (4x)^2 = 49p^2 - 16x^2.\end{aligned}$$

Пример 3. Преобразовать выражение

$$(-p^3y^2 - 6)(-p^3y^2 + 6)$$

в многочлен стандартного вида.

Решение.

$$\begin{aligned}(-p^3y^2 - 6)(-p^3y^2 + 6) &= (-1)(p^3y^2 + 6)(-1)(p^3y^2 - 6) = \\ &= (p^3y^2 + 6)(p^3y^2 - 6) = (p^3y^2)^2 - 6^2 = p^6y^4 - 36.\end{aligned}$$



Можно было сразу применить формулу разности квадратов:

$$(-p^3y^2 - 6)(-p^3y^2 + 6) = (-p^3y^2)^2 - 6^2 = p^6y^4 - 36.$$

▲ **Пример 4.** Сравнить 228^2 и $227 \cdot 229$.

Решение.

$$227 \cdot 229 = (228 - 1)(228 + 1) = 228^2 - 1 < 228^2.$$

Пример 5. Вычислить, используя формулу разности квадратов:

а) $102 \cdot 98$; б) 204^2 ; в) 47^2 .

Решение. а) $102 \cdot 98 = (100 + 2)(100 - 2) = 100^2 - 2^2 =$
 $= 10\,000 - 4 = 9996.$

б) Рассмотрим выражение $(204 - 4)(204 + 4)$. По формуле разности квадратов получим:

$$(204 - 4)(204 + 4) = 204^2 - 16.$$

Значит,

$$\begin{aligned}204^2 &= (204 - 4)(204 + 4) + 16 = \\ &= 200 \cdot 208 + 16 = 41\,600 + 16 = 41\,616.\end{aligned}$$

в) Рассмотрим равенство

$$(47 - 3)(47 + 3) = 47^2 - 3^2 = 47^2 - 9.$$

Отсюда имеем:

$$\begin{aligned} 47^2 &= (47 - 3)(47 + 3) + 9 = 44 \cdot 50 + 9 = \\ &= 2200 + 9 = 2209. \blacktriangle \end{aligned}$$



1. Сформулируйте теорему о разности квадратов.
2. Как читается формула разности квадратов?
3. Отличается ли квадрат разности двух выражений от разности квадратов этих выражений?

Упражнения

Преобразуйте выражение в многочлен стандартного вида (4.16—4.19).

4.16°. 1) $(a - b)(a + b)$; 2) $(b - 10)(b + 10)$;
 3) $(m - 1)(m + 1)$; 4) $(c - 2)(c + 2)$;
 5) $(1 - x)(1 + x)$; 6) $(3 - y)(3 + y)$;
 7) $(m - 2n)(m + 2n)$; 8) $(n - 3m)(n + 3m)$.

4.17°. 1) $(20a - 3b)(20a + 3b)$; 2) $(5b - 9a)(5b + 9a)$;
 3) $(ab - 1)(ab + 1)$; 4) $(1 - xy)(1 + xy)$;
 5) $\left(\frac{1}{2}a - 3\right)\left(\frac{1}{2}a + 3\right)$;
 6) $\left(\frac{1}{3}m + \frac{2}{7}n\right)\left(\frac{1}{3}m - \frac{2}{7}n\right)$;
 7) $\left(\frac{5}{9}ax + 0,75bc\right)\left(\frac{5}{9}ax - 0,75bc\right)$;
 8) $\left(\frac{2}{3}mp - 0,25dt\right)\left(\frac{2}{3}mp + 0,25dt\right)$.

4.18°. 1) $4(a - 3)(3 + a)$; 2) $-3(a + 4)(4 - a)$;
 3) $0,1b(y - 9)(9 + y)$; 4) $0,2y(3 - y)(y + 3)$.

4.19°. 1) $(a + y)(-a - y)$; 2) $(-a + b)(-b + a)$;
 3) $(-x + y)(y + x)$; 4) $(m - n)(n + m)$;
 5) $(-m - n)(m - n)$; 6) $(-c - d)(-c + d)$;

- 7) $(-6b - 1)(6b - 1)$; 8) $(-3y - 4)(4 - 3y)$;
9) $(-1 - 3ab)(1 - 3ab)$; 10) $(-3 - 4mn)(4mn - 3)$;
11) $-3x(x - 2)(-2 - x)$; 12) $-4x(-3 - x)(x - 3)$.

4.20°. Найдите произведение:

- 1) $37 \cdot 43$; 2) $48 \cdot 52$;
3) $201 \cdot 199$; 4) $101 \cdot 99$;
5) $1,05 \cdot 0,95$; 6) $5,01 \cdot 4,99$;
7) $13,3 \cdot 12,7$; 8) $25,8 \cdot 26,2$;
9) $2\frac{5}{7} \cdot 3\frac{2}{7}$; 10) $6\frac{8}{15} \cdot 7\frac{7}{15}$.

4.21. Сравните:

- 1) 193^2 и $192 \cdot 194$;
2) 268^2 и $267 \cdot 269$;
3) $1243 \cdot 1245$ и 1244^2 ;
4) 1263^2 и $1262 \cdot 1264$.

4.22. Найдите значение выражения:

- 1) $(a + 3)(a - 3) - (a + 5)(a - 5)$ при $a = 1627$;
2) $(a - 9)(a + 9) - (a - 7)(a + 7)$ при $a = -2901$;
3) $(-a - 3)(3 - a) + (-5 - a)(a - 5)$ при $a = 12\,346$;
4) $(-6 - a)(a - 6) - (a - 10)(-a - 10)$ при $a = -18\,025$.

4.23°. Преобразуйте выражение в многочлен стандартного вида:

- 1) $(3x + 4)(3x - 4) + x^2$;
2) $(5y - 1)(5y + 1) - 3y^2$;
3) $6a^2 + (-7 - 4a)(-7 + 4a)$;
4) $4,3m^2 + (-2m - 3)(2m - 3)$;
5) $49b^2 - (3b - 2)(2 + 3b)$;
6) $0,02x^2 - (0,1x + 1)(1 - 0,1x)$.

4.24°. Найдите значение выражения:

- 1) $(a - 3)(a + 3) - a(a + 4)$ при $a = 0,25$;
2) $d(d - 2) + (5 - d)(d + 5)$ при $d = -0,5$;
3) $(-3b - 5)(3b - 5) - 4b(b + 6)$ при $b = -2$;

- 4) $6x(x+1) - (3x-2)(-3x-2)$ при $x = -3$;
 5) $(6b-7)(7+6b) + (3b-2)(-2+3b)$ при $b = \frac{1}{5}$;
 6) $(4k+8)(8-4k) + (-5k+2)(2+5k)$ при $k = \frac{1}{2}$;
 7) $(3a-4)^2 - (3a-4b)(3a+4b)$ при $a = \frac{1}{2}$, $b = 6$;
 8) $(3a+7b)(3a-7b) - (3a+7b)^2$ при $a = \frac{1}{3}$, $b = -3$.

Преобразуйте выражение в многочлен стандартного вида (4.25—4.28).

- 4.25. 1) $(x-y)^2(y+x)$; 2) $(a-b)(b+a)^2$;
 3) $(2-x)^2(2+x)^2$; 4) $(a-5)^2(a+5)^2$;
 5) $(6b-3)^2(3+6b)^2$; 6) $(4d-2)^2(4d+2)^2$;
 7) $(a-3)(a+3)(a^2-9)$; 8) $(c^2+1)(c+1)(c-1)$;
 9) $(n^2-1)(n^2+1)(n^4+1)$;
 10) $(a^4-1)(a^4+1)(a^8+1)$.
- 4.26. 1) $(4a+c)(4a-c)(16a^2+c^2)$;
 2) $(3b^2-c^2)(3b^2+c^2)(9b^4+c^4)$;
 3) $(3x^3-c^2)(3x^3+c^2)(9x^6+c^4)$;
 4) $(2a^2b^3-5)(2a^2b^3+5)(4a^4b^6+25)$.
- 4.27. 1) $(17a^3b^5-2)(17a^3b^5+2)$;
 2) $(100b^2c^4-1)(100b^2c^4+1)$;
 3) $\left(2,8a^2-1\frac{3}{11}bc\right)\left(2,8a^2+1\frac{3}{11}bc\right)$;
 4) $\left(1,3a^7-2\frac{5}{13}y^3\right)\left(1,3a^7+2\frac{5}{13}y^3\right)$;
 5)* $\left(\frac{2}{3}a+\frac{3}{7}b-\frac{5}{9}c\right)\left(\frac{2}{3}a+\frac{3}{7}b+\frac{5}{9}c\right)$;
 6)* $\left(3m-\frac{2}{11}n+5\frac{1}{2}p\right)\left(3m+\frac{2}{11}n-5\frac{1}{2}p\right)$.
- 4.28. 1) $(b^5c^2-7)(b^5c^2+7)$; 2) $(a^2x^3-5)(a^2x^3+5)$;
 3) $(9x^k-y^2)(9x^k+y^2)$; 4) $(x^3-5k^n)(x^3+5k^n)$;
 5) $(0,1c^3-3y^2)(0,1c^3+3y^2)$;
 6) $(0,7x^4-3y)(0,7x^4+3y)$;

$$7) (3x^{k-1} - y^{2k})(3x^{k-1} + y^{2k});$$

$$8) (a^{3k} - 7b^{k+3})(a^{3k} + 7b^{k+3}).$$

4.29. Решите уравнение:

$$1) (2x - 3)(2x + 3) - x(4x - 18) = 0;$$

$$2) (5y - 1)^2 - (3y - 2)(-3y - 2) = 2y(17y - 2);$$

$$3) (-7 + 4b)(7 + 4b) - (4b - 5)^2 = 0;$$

$$4) (-5x - 2)(-5x + 2) - (5x - 3)^2 = 22x + 3;$$

$$5) -(2x - 5)^2 - 6x = 8 - (2x - 3)(2x + 3);$$

$$6) (5 - 3x)(5 + 3x) + 20x = 29 - (3x - 4)^2;$$

$$7) (3 + x)(3 - x) + (x - 2)^2 = 7x - 20;$$

$$8) x(5 - x) + (x - 9)(x + 9) = (x + 3)(x + 1) - x^2.$$

▲ 4.3. Куб суммы и куб разности

Теорема 1. При любых значениях a и b верно равенство

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3. \quad (1)$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} (a + b)^3 &= (a + b)(a + b)^2 = (a + b)(a^2 + 2ab + b^2) = \\ &= a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3 = \\ &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3. \quad \square \end{aligned}$$

Так как равенство (1) верно при любых значениях a и b , то оно является тождеством. Это тождество называется **формулой куба суммы**. Если в эту формулу вместо a и b подставить какие-нибудь выражения, то опять получится тождество. Поэтому формула куба суммы читается так:



куб суммы двух выражений равен кубу первого выражения плюс утроенное произведение квадрата первого выражения и второго, плюс утроенное произведение первого выражения и квадрата второго, плюс куб второго выражения.

Эта формулировка показана в виде схемы на рисунке 52.

Рис. 52
$$(\square + \triangle)^3 = \square^3 + 3 \cdot \square^2 \cdot \triangle + 3 \cdot \square \cdot \triangle^2 + \triangle^3$$

Теорема 2. При любых значениях a и b верно равенство

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3. \quad (2)$$

Доказательство проведите самостоятельно.

Так как равенство (2) верно при любых значениях a и b , то оно является тождеством. Это тождество называется **формулой куба разности**. Если в эту формулу вместо a и b подставить какие-нибудь выражения, то опять получится тождество. Поэтому формула куба разности читается так:



куб разности двух выражений равен кубу первого выражения минус утроенное произведение квадрата первого выражения и второго, плюс утроенное произведение первого выражения и квадрата второго, минус куб второго выражения.

Эта формулировка показана в виде схемы на рисунке 53.

Рис. 53
$$(\square - \triangle)^3 = \square^3 - 3 \cdot \square^2 \cdot \triangle + 3 \cdot \square \cdot \triangle^2 - \triangle^3$$

Заметим, что формулы (1) и (2) можно записать в таком виде:

$$\begin{aligned} (a + b)^3 &= a^3 + b^3 + 3ab(a + b); \\ (a - b)^3 &= a^3 - b^3 - 3ab(a - b). \end{aligned}$$

Пример 1. Пользуясь формулой куба суммы, раскрыть скобки в выражении $(4x + 5)^3$.

Решение. $(4x + 5)^3 =$

↓ применим формулу куба суммы ↓

$$= (4x)^3 + 3(4x)^2 \cdot 5 + 3 \cdot 4x \cdot 5^2 + 5^3 = \\ = 64x^3 + 240x^2 + 300x + 125.$$

Пример 2. Пользуясь формулой куба разности, раскрыть скобки в выражении $(2x^3y - 3p)^3$.

Решение. $(2x^3y - 3p)^3 =$

$$= (2x^3y)^3 - 3(2x^3y)^2 \cdot 3p + 3 \cdot 2x^3y(3p)^2 - (3p)^3 = \\ = 8x^9y^3 - 36px^6y^2 + 54p^2x^3y - 27p^3.$$



1. Сформулируйте теорему о кубе суммы.
2. Как читается формула куба суммы?
3. Сформулируйте теорему о кубе разности.
4. Как читается формула куба разности?
5. Как еще можно записать формулу куба суммы и формулу куба разности?
6. Отличается ли куб суммы двух выражений от суммы кубов этих выражений?

Упражнения

Раскройте скобки (4.30—4.32).

4.30. 1) $(x - y)^3$; 2) $(m + n)^3$;
 3) $(a + 2b)^3$; 4) $(5n - 1)^3$;
 5) $(4 - 3a)^3$; 6) $(2a + 6)^3$;
 7) $(a^2 + b^4)^3$; 8) $(x^3 - y^2)^3$.

4.31. 1) $\left(\frac{3}{4}ab^2 + \frac{2}{3}a^2\right)^3$; 2) $\left(\frac{1}{2}a + ab^2\right)^3$;
 3) $\left(\frac{1}{3}ab - c\right)^3$; 4) $\left(\frac{1}{4}x - yz\right)^3$;
 5) $(a^3x + ax^2)^3$; 6) $(b^2y + by^2)^3$;
 7) $(0,4a^5 - 0,3a^3)^3$; 8) $(0,5x^2 - 0,2x^5)^3$.

4.32. 1) $(b^k + 1)^3$; 2) $(1 + a^{n+1})^3$;
 3) $(0,1x^{n+1} - y^{n+1})^3$; 4) $(a^{2k-3} - 0,2b^{n-1})^3$.

4.33. Замените знаки «?» одночленами так, чтобы получилось тождество:

- 1) $(a^3 + ?)^3 = ? + ? + 3a^3c^2 + ?$;
- 2) $(? - ?)^3 = ? - 12x^2y + 6xy^2 - ?$;
- 3) $(? - ?)^3 = 125a^6b^3 - 150a^5b^4 + ? - ?$;
- 4) $(? + ?)^3 = ? + 6m^2n + ? + 8n^3$;
- 5) $64m^3 - ? + ? - 216n^3 = (? - ?)^3$;
- 6) $512a^3 - 384a^2b^4 + ? - ? = (? - ?)^3$;
- 7) $125x^3 + ? + ? + 27y^3 = (? + ?)^3$;
- 8) $8c^9 - ? + 150c^3d^{12} - ? = (? - ?)^3$.

4.34. Является ли тождеством равенство:

- 1) $(a + b)^3 = a^3 + b^3$;
- 2) $(a - b)^3 = a^3 - b^3$;
- 3) $(a - b)^3 = -(b - a)^3$;
- 4) $(-a - b)^3 = -(a + b)^3$?

Докажите, что при любых значениях a и b верно равенство (4.35—4.36).

4.35. 1) $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$;

2) $(a - b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b)$;

3) $(a - b)^3 - (a + b)^3 = -2b(3a^2 + b^2)$;

4) $(a + b)^3 - (a - b)^3 = 2b(b^2 + 3a^2)$.

4.36. 1) $(a + b)^3 + (a - b)^3 = a(a + 2b)^2 + a(a - 2b)^2 - 2ab^2$;

2) $(a + b)^3 - (a - b)^3 = a(a + 2b)^2 - a(a - 2b)^2 - 2a^2b + 2b^3$;

3) $(a + b)^3 - 3(a + b)^2(a - b) + 3(a + b)(a - b)^2 - (a - b)^3 = 8b^3$;

4) $(a - b)^3 + 3(a - b)^2(a + b) + 3(a - b)(a + b)^2 + (a + b)^3 = 8a^3$.

Найдите значение выражения (4.37—4.38).

4.37. 1) $7^3 - 3^2 \cdot 49 + 27 \cdot 7 - 3^3$;

2) $15^3 + 3 \cdot 15^2 \cdot 75 + 45 \cdot 75^2 + 75^3$;

3)
$$\frac{5,3^3 + 3 \cdot 5,3^2 \cdot 4,7 + 3 \cdot 4,7^2 \cdot 5,3 + 4,7^3}{5,3^2 + 2 \cdot 5,3 \cdot 4,7 + 4,7^2}$$
;

4)
$$\frac{24,5^2 - 14,5^2}{13,9^3 - 3 \cdot 13,9^2 \cdot 3,9 + 3 \cdot 13,9 \cdot 3,9^2 - 3,9^3}$$
.

- 4.38. 1) $(2a + b)^3 - (a - b)^2(8a + b)$ при $a = 2\frac{1}{3}$, $b = \frac{1}{3}$;
 2) $(a - 3b)^3 + (a + 3b)^2(3b - a)$ при $a = -\frac{1}{2}$, $b = -\frac{1}{3}$;
 3) $(5a^2 + 3b)^3 + (5a^2 - 3b)^3 - 250a^6$ при $a = 0,5$,
 $b = 0,2$;
 4) $(4a^2 - 2b^3)^3 + (4a^2 + 2b^3)^3 - 96a^2b^6$ при $a = \frac{1}{2}$,
 $b = -6,25$.

4.39. Представьте в виде куба двучлена:

- 1) $x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$;
- 2) $m^3 - 3m^2n + 3mn^2 - n^3$;
- 3) $\frac{1}{8}x^6 - \frac{1}{4}x^4y + \frac{1}{6}x^2y^2 - \frac{1}{27}y^3$;
- 4) $\frac{8}{27}m^6 + 4m^4n^5 + 18m^2n^{10} + 27n^{15}$;
- 5) $125a^3b^3 - 225a^2b^2c^2 + 135abc^4 - 27c^6$;
- 6) $8a^3 - 84a^2b + 294ab^2 - 343b^3$.

▲ 4.4. Сумма кубов и разность кубов

Выражения вида

$$a^2 - ab + b^2 \text{ и } a^2 + ab + b^2$$

называют соответственно *неполным квадратом разности* и *неполным квадратом суммы* (сравните их с квадратом разности и квадратом суммы).

Теорема 1. При любых значениях a и b верно равенство

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3. \quad (1)$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} & (a + b)(a^2 - ab + b^2) = \\ & = a^3 + a^2b - a^2b - ab^2 + ab^2 + b^3 = a^3 + b^3. \quad \square \end{aligned}$$

Так как равенство (1) верно при любых значениях a и b , то оно является тождеством. Это тожде-

ство называется **формулой суммы кубов**. Если в эту формулу вместо a и b подставить какие-нибудь выражения, то опять получится тождество. Поэтому формула суммы кубов читается так:



произведение суммы двух выражений и неполного квадрата их разности равно сумме кубов этих выражений.

Эта формулировка показана в виде схемы на рисунке 54.

Рис. 54

$$(\square + \triangle)(\square^2 - \square \cdot \triangle + \triangle^2) = \square^3 + \triangle^3$$

Теорема 2. При любых значениях a и b верно равенство

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3. \quad (2)$$

Доказательство проведите самостоятельно.

Так как равенство (2) верно для любых значений a и b , то оно является тождеством. Это тождество называется **формулой разности кубов**. Если в эту формулу вместо a и b подставить какие-нибудь выражения, то опять получится тождество. Поэтому формула разности кубов читается так:



произведение разности двух выражений и неполного квадрата их суммы равно разности кубов этих выражений.

Эта формулировка показана в виде схемы на рисунке 55.

Рис. 55

$$(\square - \triangle)(\square^2 + \square \cdot \triangle + \triangle^2) = \square^3 - \triangle^3$$



1. Какое выражение называется неполным квадратом разности a и b ?
2. Какое выражение называется неполным квадратом суммы a и b ?
3. Сформулируйте теорему о сумме кубов.
4. Как читается формула суммы кубов?
5. Сформулируйте теорему о разности кубов.
6. Как читается формула разности кубов?
7. Чем отличается квадрат суммы двух выражений от неполного квадрата суммы этих выражений?

Упражнения

Представьте выражение в виде многочлена стандартного вида (4.40—4.41).

- 4.40. 1) $(m - 3)(m^2 + 3m + 9)$;
2) $(p + 1)(p^2 - p + 1)$;
3) $(1 + 2a)(1 - 2a + 4a^2)$;
4) $(3 - 2a)(9 + 6a + 4a^2)$;
5) $(x^2 - y^2)(x^4 + y^4 + x^2y^2)$;
6) $(p^2 - 1)(p^4 + p^2 + 1)$;
7) $(2a - 3b)(4a^2 + 9b^2 + 6ab)$;
8) $(3b^3 + 1)(9b^6 - 3b^3 + 1)$;
9) $\left(\frac{3}{5}m^2 - \frac{1}{3}n^3\right)\left(\frac{9}{25}m^4 + \frac{1}{9}n^6 + \frac{1}{5}m^2n^3\right)$;
10) $\left(\frac{2}{3}a^4 + \frac{3}{2}b^4\right)\left(\frac{4}{9}a^8 - a^4b^4 + \frac{9}{4}b^8\right)$.

- 4.41. 1) $(a + 2)(a^2 - 2a + 4) - a(a + 1)^2 - 9$;
2) $(a + 3)(a^2 - 3a + 9) - a(a - 5)^2 + 3$;
3) $(x - 1)(x^2 + x + 1) + x(1 - x)^2 + 5$;
4) $(x - 4)(x^2 + 16 + 4x) - (x + 4)^2x - 60$.

- 4.42. Найдите значение выражения:

- 1) $a(a + 2)(a - 2) - (a - 3)(a^2 + 3a + 9)$ при $a = \frac{3}{4}$;
- 2) $2x^3 + 9 - (x + 1)(x^2 - x + 1)$ при $x = \frac{1}{2}$;

- 3) $3(a-1)^2 + (a+2)(a^2 - 2a + 4) - 3(a+1)^2$ при $a = -3$;
4) $4(3-a)^2 + (a-3)(a^2 + 9 + 3a) - (6-a)(6+a)$ при $a = -2$;
5) $(3x+4y)(9x^2 + 16y^2 - 12xy) - (3x-2y) \times (9x^2 + 6xy + 4y^2)$ при $x = -0,8$, $y = 0,5$;
6) $(2x-5y)(4x^2 + 10xy + 25y^2) + (2x+5y)(2x-5y)^2 + 10xy(2x+5y)$ при $x = 1,5$, $y = 3,76$.

4.43. Докажите тождество:

- 1) $\left(\frac{a-4}{2}\right)^3 - \left(\frac{a+4}{2}\right)^3 = -(3a^2 + 16)$;
2) $\left(\frac{a-5}{5}\right)^3 + \left(\frac{a+5}{5}\right)^3 = \frac{2a(a^2 + 75)}{125}$.

4.44. Замените знаки «?» одночленами так, чтобы получилось тождество:

- 1) $a^3 + ? = (a+2)(?-2a+?)$;
2) $? - m^3 = (?-?)(25+5m+?)$;
3) $? - 27b^9 = (2a^2 - ?)(? + 6a^2b^3 + ?)$;
4) $125m^9 + ? = (? + 6n^4)(?-?+?)$.

4.45. Найдите значение выражения:

- 1) $\frac{15^3 - 12^3}{15^2 + 12^2 + 15 \cdot 12} + 3$;
2) $\frac{135^3 + 125^3}{135^2 - 125^2} - 13,5 \cdot 125$;
3) $\frac{15,9^3 + 14,1^3}{47,25 - 17\frac{1}{4}} + 3 \cdot 15,9 \cdot 14,1$;
4) $\left(\frac{16,4^3 + 6,4^3}{16,4^2 - 6,4^2} + 1,64 \cdot 19,2\right) : 22,8$.

4.46. Докажите тождество:

1) $m^3 + n^3 = (m + n)^3 - 3mn(m + n)$;

2) $m^3 - n^3 = (m - n)^3 + 3mn(m - n)$.

4.47. 1) Известно, что $a + b = 5$, $ab = 6$. Найдите сумму кубов чисел a и b .

2) Известно, что $a - b = 3$, $ab = 28$. Найдите разность кубов чисел a и b .

4.48. Решите уравнение:

1) $(2x - 3)(4x^2 + 6x + 9) - 2x(2x - 5)(2x + 5) = 7x + 16$;

2) $(y + 2)(y^2 - 2y + 4) - y(y - 3)(y + 3) = 26$;

3) $5m(m - 3)^2 - 5(m - 1)^2(m - 1) + 15(m + 2)(m - 2) = 5$;

4) $\left(\frac{1}{3} + \frac{3}{2}x\right)\left(\frac{1}{9} + \frac{9}{4}x^2 - \frac{1}{2}x\right) - \frac{3x}{2}\left(\frac{3}{2}x + \frac{1}{3}\right)^2 + 1\frac{1}{2}x^2 = \frac{2}{9}$.

Глава 5

РАЗЛОЖЕНИЕ МНОГОЧЛЕНОВ НА МНОЖИТЕЛИ

5.1. Вынесение общего множителя за скобки

Рассмотрим равенство

$$6x^3y^2(3x^5 + 5y^3) = 18x^8y^2 + 30x^3y^5.$$

Оно является тождеством на основании распределительного закона (рис. 56) и показывает, как *произведение преобразовано в сумму*.

Запишем это же равенство иначе:

$$18x^8y^2 + 30x^3y^5 = 6x^3y^2(3x^5 + 5y^3).$$

Теперь видно, как на основании распределительного закона (рис. 57) *сумма преобразована в произведение*: общий множитель $6x^3y^2$ одночленов $18x^8y^2$ и $30x^3y^5$ вынесен за скобки. Такое преобразование многочлена в произведение называют *разложением на множители*.

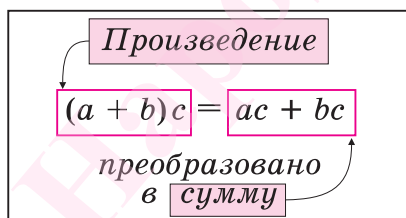


Рис. 56

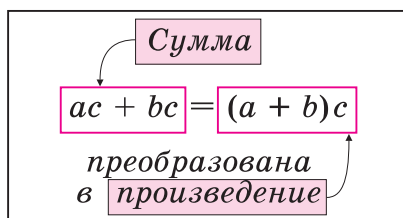


Рис. 57

Разложить многочлен на множители — это значит представить его в виде произведения двух или более многочленов, каждый из которых содержит хотя бы одну переменную.

Способ, которым мы воспользовались, раскладывая многочлен $18x^8y^2 - 30x^3y^5$ на множители, называется **вынесением общего множителя за скобки**.

При вынесении общего множителя за скобки пользуются следующим правилом:



переменные, входящие в каждый член многочлена, выносят за скобки в степенях с наименьшими показателями, с которыми эти переменные входят в члены многочлена.

Числовой множитель тоже можно выносить за скобки. Обычно это делают так, чтобы в скобках оставался многочлен с целыми коэффициентами, а сами эти коэффициенты имели наибольший общий делитель, равный 1.



Чтобы найти многочлен, который останется в скобках после вынесения общего множителя, нужно данный многочлен разделить на этот общий множитель.

Общим множителем могут быть не только одночлены, но и многочлены. Например, для выражения

$$2x(a^2 - c) + 3y(a^2 - c) - 5z(a^2 - c)$$

общим множителем является многочлен $a^2 - c$.

После вынесения этого множителя за скобки получим произведение многочленов, значит, данный многочлен разложен на множители:

$$(a^2 - c)(2x + 3y - 5z).$$

Пример 1. Вынести общий множитель за скобки:

$$48a^7b^4c + 36a^3b^5.$$

Решение. Для коэффициентов 48 и 36 найдем наибольший общий делитель:

$$\text{НОД}(48; 36) = 12.$$

Переменная a входит в первое слагаемое в седьмой степени, во второе — в третьей, значит, в общий множитель войдет a^3 . Аналогично в него войдет b^4 . Переменная c не является общим множителем, так как не входит во второе слагаемое. Итак, общий множитель членов многочлена равен $12a^3b^4$.

$$48a^7b^4c + 36a^3b^5 = 12a^3b^4 \cdot 4a^4c + 12a^3b^4 \cdot 3b =$$

$$\downarrow \begin{array}{l} \text{воспользовавшись распределительным законом,} \\ \text{вынесем общий множитель за скобки} \end{array} \downarrow$$

$$= 12a^3b^4(4a^4c + 3b).$$

Проверить правильность преобразований можно, перемножив полученные множители.

Пример 2. Разложить на множители многочлен $70x^3y - 105x^2y^7 + 35x^2y$.

Решение. НОД (70; 105; 35) = 35; общий множитель — $35x^2y$, поэтому

$$\begin{aligned} &70x^3y - 105x^2y^7 + 35x^2y = \\ &= 35x^2y \cdot 2x - 35x^2y \cdot 3y^6 + 35x^2y \cdot 1 = \\ &= 35x^2y(2x - 3y^6 + 1). \end{aligned}$$

Пример 3. Разложить на множители многочлен

$$\frac{2}{3}ab^2 - \frac{1}{5}abc.$$

Решение.

$$\frac{2}{3}ab^2 - \frac{1}{5}abc =$$

$$\downarrow \text{приведем коэффициенты к общему знаменателю} \downarrow$$

$$= \frac{10}{15}ab^2 - \frac{3}{15}abc =$$

$$\downarrow \text{вынесем общий множитель } \frac{1}{15}ab \text{ за скобки} \downarrow$$

$$= \frac{1}{15}ab(10b - 3c).$$

Пример 4. Найти значение выражения $ab + ac$ при $a = 147,6$, $b = 13,82$ и $c = 86,18$.

Решение. Пусть $A = ab + ac = a(b + c)$;

$$A \begin{cases} a = 147,6 \\ b = 13,82 \\ c = 86,18 \end{cases} = 147,6(13,82 + 86,18) = 147,6 \cdot 100 = 14\,760.$$

Ответ: $ab + ac = 14\,760$ при указанных значениях a, b, c .

Пример 5. Решить уравнение $7y^2 - 4y = 0$.

Решение. Данное уравнение равносильно уравнению $y(7y - 4) = 0$. Значит, $y = 0$ или $7y - 4 = 0$, откуда имеем $y = 0$ или $y = \frac{4}{7}$.

Ответ: $0; \frac{4}{7}$.

▲ **Пример 6.** Разложить на множители выражение (m — натуральное число):

а) $c^{m+3} - c^{m+1}$; б) $48p^{3+2m} + 12p^{1+2m}$.

Решение. а) $c^{m+3} - c^{m+1} =$

$$\begin{aligned} & \downarrow \quad \text{вынесем за скобки степень } c^{m+1} \quad \downarrow \\ & \downarrow \quad (\text{здесь } m+1 \text{ — наименьший из показателей}) \quad \downarrow \\ & = c^{m+1}(c^{m+3} : c^{m+1} - c^{m+1} : c^{m+1}) = c^{m+1}(c^{m+3-(m+1)} - 1) = \\ & \quad = c^{m+1}(c^2 - 1) = c^{m+1}(c-1)(c+1); \end{aligned}$$

б) $48p^{3+2m} + 12p^{1+2m} = 12p^{1+2m}(4p^2 + 1)$. ▲



1. Почему выражение $3ab^2 - 12a^3b$ можно назвать суммой?
2. На основании какого закона можно преобразовать сумму в произведение?
3. Что значит разложить многочлен на множители?
4. Как найти многочлен, который останется в скобках после вынесения общего множителя?

Упражнения

Вынесите общий множитель за скобки (5.1—5.2).

- 5.1°. 1) $4p + 4q$; 2) $2a - 2b$; 3) $7m - 7k$;
 4) $8a - 16$; 5) $4y - 8x$; 6) $9b + 81c$;
 7) $kx + k$; 8) $ax + ay$.

- 5.2°. 1) $bq - bc$; 2) $cb - bm$;
3) $be - ce$; 4) $km - pm$;
5) $25xy + 15y$; 6) $9ab + 18bc$;
7) $6x - 6y$; 8) $-12mn - 12n$.

5.3°. Найдите значение выражения:

- 1) $16 \cdot 324 + 16 \cdot 676$;
2) $23 \cdot 729 + 23 \cdot 271$;
3) $36 \cdot 2\frac{2}{17} - 2\frac{2}{17} \cdot 19$;
4) $4\frac{1}{5} \cdot 81 - 36 \cdot 4\frac{1}{5}$;
5) $394 \cdot 28 + 301 \cdot 28 + 305 \cdot 28$;
6) $960 \cdot 2,5 - 225 \cdot 2,5 - 135 \cdot 2,5$;
7) $36 \cdot 2,78 + 41 \cdot 2,78 + 23 \cdot 2,78$;
8) $4,99 \cdot 147 - 4,99 \cdot 21 - 4,99 \cdot 26$;
9) $17\frac{5}{8} \cdot 1\frac{1}{4} - 4\frac{3}{8} \cdot 1\frac{1}{4} - 5\frac{1}{4} \cdot 1\frac{1}{4}$;
10) $27\frac{7}{9} \cdot 2\frac{2}{5} + 25\frac{1}{9} \cdot 2\frac{2}{5} - 42\frac{8}{9} \cdot 2\frac{2}{5}$.

Вынесите общий множитель за скобки (5.4—5.10).

- 5.4°. 1) $m - m^2$; 2) $a^2 + a^3$;
3) $c^4 - c^5$; 4) $d^6 - d^5$;
5) $k^3 + k^2 - 5k$; 6) $4b^3 + b^5 - b^6$;
7) $3n^2 - n^3 - n^4$; 8) $a^5 - 2a^3 - a^7$.
- 5.5. 1) $7m^6 - 21m^8$; 2) $24q^8 - 18q^5$;
3) $4a^7 - 11a^3$; 4) $8a^5 - 48a^3$;
5) $25y^4 - 15y^2$; 6) $9m^3 - 21m^4$.
- 5.6. 1) $6b^8 - 12b^3 - 3b^7$; 2) $16n^9 + 24n^7 + 8n^6$;
3) $x^4b^3 + x^2b^2$; 4) $m^3n^5 - mn^4$;
5) $ab^2 - a^2b - 4ab$; 6) $8x^2y^2 + 7x^2y - 5xy$.
- 5.7. 1) $14x^4y^5 + 35y^6x^4$;
2) $16a^3x^6 - 40a^5x^5$;
3) $-6ab^2 - 18b^3a^2 + 3ab$;

4) $-7mb^5 - 14m^2b^4 + 7mb^4$;

5) $25x^4y^3 + 15y^2x^5 - 20x^4y$;

6) $8x^4y^9 - 12x^3y^8 + 16x^2y^8$;

7) $8t^2x^3 + 72t^4x^4 + 12tx^5$;

8) $14a^2y^8 + 28a^3y^6 + 14a^2y^6$;

9) $6a^2b^2 - 6a^2b + 18a^2b^3$;

10) $6y^5t + 12y^4t^2 - 3y^2t^3$.

5.8°. 1) $x(a - b) + y(a - b)$;

2) $d(x + y) - k(x + y)$;

3) $a(b + 3) - c(b + 3)$;

4) $k(a - 4) + l(a - 4)$;

5) $(y - 2) + b(y - 2)$;

6) $a(x + 5) - (x + 5)$;

7) $x(3 - y) - 4(3 - y)$;

8) $8(6 - x) + a(6 - x)$.

5.9°. 1) $4c(c - k) + 5a(c - k)$;

2) $6d(t - 3) - 5b(t - 3)$;

3) $13a(b + x) - 17x(b + x)$;

4) $8a(x + y) + 3b(x + y)$;

5) $m^3(a - b) - (a - b)$;

6) $z^2(c + d) - (c + d)$.

5.10°. 1) $b(x^4 + 5) + d(x^4 + 5) - m(x^4 + 5)$;

2) $3a(5y + 7z) - 7b(5y + 7z) + d(5y + 7z)$;

3) $d(7b - 4a) - 4c(7b - 4a) + 8m(7b - 4a)$;

4) $y(3a^2 - 2b) - n(3a^2 - 2b) + 3x(3a^2 - 2b)$;

5) $6y(x - y + z) + 2x(x - y + z) - \frac{1}{3}z(x - y + z)$;

6) $7x(m + n - t) - 4y(m + n - t) + \frac{1}{2}m(m + n - t)$.

Разложите на множители (5.11—5.16).

5.11°. 1) $(a - b) + m(b - a)$;

2) $m(x - y) - k(y - x)$;

3) $5l(q - p) - 2(p - q)$;

4) $3n(z - k) + y(k - z)$.

5.12°. 1) $m^2(y - 2) - n(2 - y)$;

2) $t^3(3 - m) - d(m - 3)$;

3) $3x(a - b) + 5(b - a)$;

4) $27y^2(d - c) + 4(c - d)$;

5) $a(b - 7) - 3(7 - b)$;

6) $x(0,5 - y) - 4(y - 0,5)$;

7) $4c(y - x) - (x - y)$;

8) $(a - b) - 7m(b - a)$;

9) $(x - t) - 12a(t - x)$;

10) $3p(m - n) + (n - m)$.

5.13°. 1) $(c - d)^2 + (d - c)$;

2) $14a(a - b) - 3b(b - a)^2$;

3) $13x(x - y)^3 - 5(y - x)^2$;

4) $1,2k(m - n)^2 + 3,1(n - m)^3$.

5.14°. 1) $m(a - b) - 3(a - b) - 7d(b - a)$;

2) $4(p - q) + a(q - p) - 3b(p - q)$;

3) $t(3a - 2b) + r(2b - 3a) - k(2b - 3a)$;

4) $m(4p - 5t) - n(5t - 4p) - d(4p - 5t)$;

5) $a^2(9m - 7n) - b^4(7n - 9m) - c^6(7n - 9m)$;

6) $s^5(8a - 9b) - g^7(9b - 8a) + r^3(8a - 9b)$;

7) $k^6(2m - 3n) + k^2(3n - 2m) - k^4(2m - 3n)$;

8) $t^3(4a - 11b) - t^6(11b - 4a) + t^9(4a - 11b)$.

5.15. 1) $2(x + y) + (x + y)^2$;

2) $3(a - b) - 4(a - b)^2$;

3) $5(a - b)(a + b) + 0,1(a - b)$;

4) $6(x + y)^2 - 2(x + y)(x - y)$;

5) $(a + b)^4 - a(b + a)^3$;

6) $d(a + b)^3 - m(a + b)^2$;

7) $(x - y)^2 - (x - y)^2 y$;

8) $(m^3 + n^3)^2 - m^2(m^3 + n^3)^2$.

5.16*. 1) $b^{n+1} + b^n$;

2) $c^k + c^{k+m}$;

3) $m^{a+3} - m^3$;

4) $2m^{n+4} - 4m^4$;

5) $7a^{2n} - 14a^n$;

6) $25n^{2+m} + 15n^{3+m}$.

5.17°. Решите уравнение:

1) $m^2 + 9m = 0$;

2) $n^2 - 2n = 0$;

3) $0,5d^2 - 3d = 0$;

4) $6t^2 + 0,2t = 0$;

5) $4x - \frac{4}{7}x^2 = 0$;

6) $8x + \frac{2}{9}x^2 = 0$.

5.18°. Найдите значение выражения:

1) $m(y - 2) + n(2 - y)$ при $m = 1,8$, $n = 3,8$, $y = 1,6$;

2) $y(m - n) + n(n - m)$ при $m = 4,25$, $n = 8,25$,
 $y = 0,25$;

3) $a(8 - b) - c(b - 8)$ при $a = 1,29$, $b = 8,61$,
 $c = 2,71$;

4) $c(b - 8) - a(8 - b)$ при $a = 3,78$, $b = 12,3$,
 $c = 6,22$.

5.2. Разложение многочленов на множители способом группировки

Познакомимся с еще одним способом разложения многочлена на множители — *группировкой его членов*.

Пример 1. Разложить на множители многочлен

$$2ab - 4a + bc - 2c.$$

Решение. Сгруппируем члены многочлена попарно (первый со вторым и третий с четвертым):

$$2ab - 4a + bc - 2c = (2ab - 4a) + (bc - 2c) =$$

↑ слагаемые в каждой группе имеют ↑
 общий множитель

↓ вынесем за скобки общие множители ↓
 в каждом слагаемом

$$= 2a(b - 2) + c(b - 2) =$$

↑ каждое слагаемое имеет множитель $(b - 2)$ ↑

↓ вынесем за скобки общий множитель ↓

$$= (b - 2)(2a + c).$$

Получили разложение многочлена на множители способом группировки.



Заметим, что члены многочлена можно группировать по-разному. Так, в примере 1 можно сгруппировать первый член с третьим и второй с четвертым:

$$\begin{aligned} 2ab - 4a + bc - 2c &= (2ab + bc) + (-4a - 2c) = \\ &= b(2a + c) - 2(2a + c) = (2a + c)(b - 2). \end{aligned}$$

Однако не каждая группировка членов многочлена позволяет разложить его на множители. Группируя в примере 1 первый член многочлена с четвертым и второй с третьим, не удастся выполнить разложение его на множители (убедитесь в этом).

Пример 2. Разложить на множители многочлен

$$4k^2 - 16k + 3kp^2 - 12p^2.$$

Решение. *Способ 1.*

$$\begin{aligned} 4k^2 - 16k + 3kp^2 - 12p^2 &= \\ &= (4k^2 - 16k) + (3kp^2 - 12p^2) = \\ &= 4k(k - 4) + 3p^2(k - 4) = (k - 4)(4k + 3p^2). \end{aligned}$$



Способ 2.

$$\begin{aligned} 4k^2 - 16k + 3kp^2 - 12p^2 &= \\ &= (4k^2 + 3kp^2) + (-16k - 12p^2) = \\ &= k(4k + 3p^2) - 4(4k + 3p^2) = (4k + 3p^2)(k - 4). \end{aligned}$$



1. Приведите примеры разложения многочлена на множители способом группировки.
2. Разложите многочлен $xz - yz + xq - yq - xp + yp$ на множители способом группировки. Какие еще варианты группировки членов многочлена возможны?

Упражнения

5.19°. Найдите значение выражения:

- 1) $139 \cdot 16 + 24 \cdot 139 + 16 \cdot 261 + 24 \cdot 261$;
- 2) $125 \cdot 48 - 31 \cdot 43 - 31 \cdot 82 + 125 \cdot 83$;
- 3) $512 \cdot 6 + 488 \cdot 6 + 75 \cdot 25 - 75 \cdot 125$;
- 4) $25 \cdot 734 - 25 \cdot 726 + 80 \cdot 631 - 80 \cdot 626$;
- 5) $26 \cdot 1\frac{1}{3} - 1\frac{1}{3} \cdot 25 + \frac{2}{3} \cdot 8\frac{1}{7} - \frac{2}{3} \cdot 7\frac{1}{7}$;
- 6) $16\frac{3}{8} \cdot 1\frac{1}{4} - 6\frac{3}{8} \cdot 1\frac{1}{4} + 7\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{9} + 7\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{9}$.

Разложите на множители (5.20—5.27).

- 5.20°. 1) $ac + ad + bc + bd$; 2) $ac - ad + bc - bd$;
3) $ac + ad - bc - bd$; 4) $ac - ad - bc + bd$;
5) $a^2 + ab + ac + bc$; 6) $a^2 - ab + ac - bc$;
7) $a^2 + ab - ac - bc$; 8) $a^2 - ab - ac + bc$.
- 5.21°. 1) $xy + xz + y + z$; 2) $xy - xz + y - z$;
3) $m + kn + n + km$; 4) $m + kn - n - km$;
5) $m - kn + n - km$; 6) $-m + kn - n + km$;
7) $mn + 5n + 5k + km$; 8) $mn - 2k - 2n + km$.
- 5.22°. 1) $a^3 + a^2 - 5a - 5$; 2) $d^3 - d^2 + 4d - 4$;
3) $b^3 + 3b^2 + 2b + 6$; 4) $b^3 - 3b^2 + 2b - 6$;
5) $b^3 - 3b^2 - 2b + 6$; 6) $b^3 + 3b^2 - 2b - 6$;
7) $y^3 - by^2 + 3b^2y - 3b^3$; 8) $y^3 + by^2 + 3b^2y + 3b^3$.
- 5.23°. 1) $y^3 + by^2 - 3b^2y - 3b^3$;
2) $y^3 - by^2 - 3b^2y + 3b^3$;
3) $y^3 - by^2 + 3b^2y - 3b^3$;
4) $4a^3 + 8a^2 + 6a^2 + 12a$;
5) $5x^3 - 5a^2x^2 + 3a^2x - 3x^2$;
6) $x^3 + y^3 - x^2y - xy^2$;
7) $x^3 - y^3 - x^2y + xy^2$;
8) $x^3 + y^3 + x^2y + xy^2$.
- 5.24°. 1) $2m(x + y) + x + y$; 2) $6k(m + n) + m + n$;
3) $8q(m - n) + m - n$; 4) $c(a - b) + a - b$;
5) $5a(b + c) - b - c$; 6) $2k(a - b) - a + b$;
7) $6x(a + b) - a - b$; 8) $2y(c - d) - c + d$.
- 5.25°. 1) $35x^2 + 35xy + 20x + 20y$;
2) $8x^2 - 12xy + 14xz - 21yz$;
3) $48ab^2 + 32ac^2 - 15cb^2 - 10c^3$;
4) $28ax + 12xy - 16ay - 21x^2$;
5) $8ab^2 - 7b^2c - 14c^3 + 16ac^2$;
6) $18abc^2 + 45a^2c - 42b^3c - 105ab^2$;
7) $35c^2 + 8ax - 28ac - 10cx$;
8) $-15a^2 - 24bc - 40ab - 9ac$.

- 5.26°. 1) $am - bm + an - bn - ap + bp$;
2) $mt^3 + nt^3 + mt^2 - pt^3 + nt^2 - pt^2$;
3) $4x^3 + 12xyz + 28xy^2 - 3x^2z - 9yz^2 - 21zy^2$;
4) $10m^2 - 5m^2n + 2n^2 - 4m + 2mn - 5mn^2$;
5) $am^3 - an^2 + cm^3 - bn^2 - cn^2 + bm^3$;
6) $an^2 - am^3 + cm^3 - cn^2 + bn^2 - bm^3$;
7) $am^3 - an^2 - cm^3 + bn^2 + cn^2 - bm^3$;
8) $cm^3 + an^2 - bm^3 + cn^2 + am^3 - bn^2$.

- 5.27. 1) $4a^2(4a - 3) + 4a(3 - 4a) - 3 + 4a$;
2) $c^2(6b - 1) - 2c(1 - 6b) - 1 + 6b$;
3) $\frac{1}{7}b(3 - 8m) - \frac{1}{4}x(8m - 3) + 3 - 8m$;
4) $\frac{2}{11}a(9 - 4n) + \frac{3}{13}b(4n - 9) + 9 - 4n$;
5) $\frac{7}{19}m(1 - 8k) - \frac{2}{3}n(8k - 1) - 1 + 8k$;
6) $\frac{1}{3}t(2 - 5p) + \frac{1}{5}d(5p - 2) - 2 + 5p$.

5.28. Докажите тождество:

- 1) $a^2 - ab + 4b - 4a = (a - b)(a - 4)$;
2) $5a^2 - 5ax - 7a + 7x = (a - x)(5a - 7)$;
3) $2b^2 - 2by + b - y = (b - y)(2b + 1)$;
4) $3kt + 3k^2 + 2t + 2k = (t + k)(3k + 2)$;
5) $4mn - m + n - 4n^2 = (m - n)(4n - 1)$;
6) $6d^3 - 5d + 6d^2t - 5t = (d + t)(6d^2 - 5)$.

5.29. Найдите значение выражения:

- 1) $8b^2 - 8bx - 3b + 3x$ при $x = -6\frac{7}{8}$, $b = 3\frac{1}{8}$;
2) $2c^2 - 2cb - 5c + 5b$ при $c = 4,125$, $b = -6,875$;
3) $4a^2 + 7b - 7a - 4ab$ при $a = 1\frac{7}{8}$, $b = -8,125$;
4) $3m^2 + 32n - 8m - 12mn$ при $m = -\frac{2}{3}$, $n = \frac{7}{12}$.

5.3. Разложение многочленов на множители с помощью формулы разности квадратов

Если формулу разности квадратов

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$

записать справа налево, то получится тождество

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b),$$

которое позволит разложить разность квадратов на множители (рис. 58).

Оно читается так:

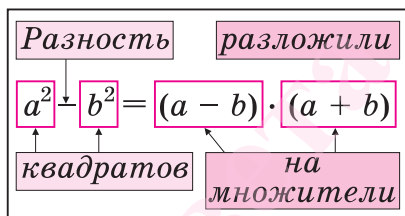


Рис. 58



разность квадратов двух выражений равна произведению разности этих выражений и их суммы.

Покажем, как формулу разности квадратов используют при разложении многочленов на множители.

Пример 1. Разложить на множители многочлен:

а) $16k^2 - 9p^2$; б) $1\frac{9}{16}x^4 - 1\frac{7}{9}y^6$.

Решение. а) $16k^2 - 9p^2 = (4k)^2 - (3p)^2 =$

↓ по формуле разности квадратов ↓

$$= (4k - 3p)(4k + 3p);$$

б) $1\frac{9}{16}x^4 - 1\frac{7}{9}y^6 = \frac{25}{16}x^4 - \frac{16}{9}y^6 =$

$$= \left(\frac{5}{4}x^2\right)^2 - \left(\frac{4}{3}y^3\right)^2 = \left(\frac{5}{4}x^2 - \frac{4}{3}y^3\right)\left(\frac{5}{4}x^2 + \frac{4}{3}y^3\right).$$

Пример 2. Найти значение выражения $997^2 - 3^2$.

Решение.

$$997^2 - 3^2 = (997 - 3)(997 + 3) = 994 \cdot 1000 = 994\,000.$$

Пример 3. Разложить на множители выражение

$$64(7x - 3y)^2 - 25(4x - 5y)^2.$$

Решение.

$$\begin{aligned} & 64(7x - 3y)^2 - 25(4x - 5y)^2 = \\ & = (8(7x - 3y))^2 - (5(4x - 5y))^2 = \\ & = (56x - 24y)^2 - (20x - 25y)^2 = \end{aligned}$$

↓ по формуле разности квадратов ↓

$$\begin{aligned} & = (56x - 24y - (20x - 25y))(56x - 24y + (20x - 25y)) = \\ & = (36x + y)(76x - 49y). \end{aligned}$$

Пример 4. Решить уравнение:

а) $x^2 - 169 = 0$; б) $x^2 = 0,49$.

Решение. а) Данное уравнение равносильно уравнению $(x - 13)(x + 13) = 0$, откуда $x = 13$ или $x = -13$.

б) $x^2 - 0,49 = 0$, значит, $(x - 0,7)(x + 0,7) = 0$, откуда $x = 0,7$ или $x = -0,7$.

Ответ: а) ± 13 ; б) $\pm 0,7$.

▲ **Пример 5.** Разложить на множители выражение

$$16^n - 9^n.$$

Решение.

$$16^n - 9^n = (4^2)^n - (3^2)^n = 4^{2n} - 3^{2n} = (4^n)^2 - (3^n)^2 =$$

↓ применив формулу разности квадратов, получим ↓
 $= (4^n + 3^n)(4^n - 3^n).$ ▲



1. На какие множители разлагается разность квадратов двух выражений?

2*. Разложите на множители двучлен $q^{8n} - p^{8m}$.

Упражнения

Разложите на множители (5.30—5.37).

5.30°. 1) $64 - a^2$;

2) $b^2 - 9$;

3) $x^2 - 4$;

4) $1 - y^2$;

5) $9y^2 - 25$;

6) $81b^2 - 49$;

7) $121m^2 - 1$;

8) $100a^2 - 144$.

- 5.31°. 1) $x^2y^2 - 9$; 2) $a^2b^2 - 25$;
3) $16 - x^2y^2$; 4) $81 - m^2k^2$;
5) $\frac{4}{9}a^2b^2 - \frac{169}{900}x^2$; 6) $\frac{81}{144}b^2 - \frac{16}{25}a^2$;
7) $\frac{25}{16}x^2 - \frac{1}{400}$; 8) $\frac{49}{121} - 0,01a^2$.
- 5.32°. 1) $x^4 - y^4$; 2) $a^4 - 25$;
3) $y^4 - 1$; 4) $256 - a^4$.
- 5.33°. 1) $a^4 - 625$; 2) $a^8 - b^4$; 3) $a^4 - b^8$;
4) $a^8 - b^8$; 5) $a^6 - b^6$; 6) $64 - a^6$;
7) $a^6 - b^8$; 8) $a^8 - b^6$.
- 5.34°. 1) $9p^2 - 25k^2$; 2) $4 - x^2y^4$;
3) $x^4 - a^2b^2$; 4) $25b^4 - 100a^2$;
5) $81m^6n^2 - 49$; 6) $x^4y^6 - y^4$;
7) $100b^4 - 9x^6$; 8) $m^6 - 9$.
- 5.35°. 1) $(a + b)^2 - c^2$; 2) $(a + 2b)^2 - c^2$;
3) $(5x + 4y)^2 - 16c^2$; 4) $(3a - b)^2 - 25d^2$;
5) $(2m - 1)^2 - 100x^2y^2$; 6) $(x - y)^2 - 4x^2y^2$;
7) $(4p + 5q)^2 - 49t^4$; 8) $(4a + 7b)^2 - 9d^4$;
9) $(a^2 + b)^2 - 16y^2b^4$; 10) $(x^2 - b)^2 - 4a^4b^2$.
- 5.36°. 1) $(5a^2 - 4b^2)^2 - 1$; 2) $(a^2 + b^2)^2 - 4a^2b^2$;
3) $(m^2 + n^2)^2 - 4m^2n^2$; 4) $(a + b)^2 - 100$;
5) $(a + 1)^2 - \frac{1}{4}a^2$; 6) $(c - 4)^2 - \frac{9}{64}c^2$;
7) $(b + 5)^2 - 0,49b^2$; 8) $(a - b)^2 - 0,01a^2$;
9) $(a - c)^2 - c^2$; 10) $(a - 2c)^2 - a^2$.
- 5.37. 1) $25a^2 - (a + b)^2$; 2) $64y^2 - (x + y)^2$;
3) $4n^2 - (m - n)^2$; 4) $25b^2 - (a^2 + b^2)^2$;
5) $16c^2 - (5a + 2c)^2$; 6) $9a^2 - (6a - b)^2$;
7) $49a^2 - (a + b)^2$; 8) $100x^2 - (5x + 4y)^2$.

Найдите значение выражения (5.38—5.40).

- 5.38°. 1) $75^2 - 25^2$; 2) $185^2 - 15^2$;
3) $487^2 - 113^2$; 4) $256^2 - 44^2$;

5) $6,8^2 - 3,2^2$;

6) $7,9^2 - 2,1^2$;

7) $\left(6\frac{1}{3}\right)^2 - \left(3\frac{1}{3}\right)^2$;

8) $\left(12\frac{3}{4}\right)^2 - \left(2\frac{1}{4}\right)^2$.

5.39°. 1) $57^2 - 27^2$;

2) $46^2 - 26^2$;

3) $23,4^2 - 23,3^2$;

4) $0,67^2 - 0,33^2$;

5) $\left(7\frac{3}{4}\right)^2 - \left(6\frac{1}{4}\right)^2$;

6) $\left(12\frac{2}{3}\right)^2 - \left(11\frac{1}{3}\right)^2$;

7) $\left(6\frac{5}{7}\right)^2 - \left(3\frac{2}{7}\right)^2$;

8) $3,187^2 - 6,813^2$;

9) $23,5^2 - 13,5^2$;

10) $\left(5\frac{7}{8}\right)^2 - \left(4\frac{1}{8}\right)^2$.

5.40°. 1) $\frac{13^2 - 11^2}{36}$;

2) $\frac{1064}{26^2 - 12^2}$;

3) $\frac{83^2 - 17^2}{81^2 - 15^2}$;

4) $\frac{310^2 - 20^2}{175^2 - 155^2}$.

Решите уравнение (5.41—5.42).

5.41°. 1) $x^2 - 25 = 0$;

2) $y^2 - 4 = 0$;

3) $64 - x^2 = 0$;

4) $9 - y^2 = 0$;

5) $y^2 - 0,81 = 0$;

6) $0,49 - x^2 = 0$;

7) $0,16x^2 - 9 = 0$;

8) $0,25y^2 - 1 = 0$.

5.42. 1) $x^2 = 49$;

2) $x^2 = 81$;

3) $9x^2 = 25$;

4) $2x^2 = 50$;

5) $7x^2 = 0$;

6) $3x^2 = -27$;

7) $-5x^2 = 20$;

8) $0,3x^2 = 0$.

5.43*. Разложите на множители выражение:

1) $49^n - 36^n$;

2) $25^n - 4^n$;

3) $100^n - 81^n$;

4) $121^n - 64^n$;

5) $a^{2n} - b^{2m}$;

6) $c^{4m} - d^{4n}$;

7) $a^{8n} - b^{6m}$;

8) $c^{12m} - d^{10n}$.

5.4. Разложение многочленов на множители с помощью формул квадрата суммы и квадрата разности

Формулы

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab \quad \text{и} \quad (a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$$

дают возможность раскладывать на множители трехчлены соответствующих видов (рис. 59).

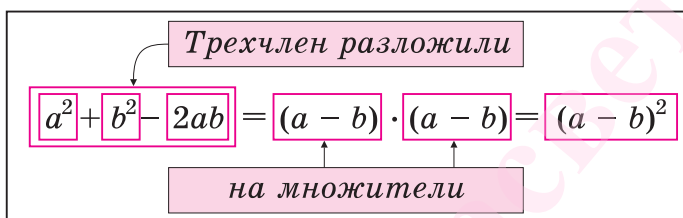


Рис. 59

Например,

$$4x^2 - 4x + 1 = (2x)^2 + 1 - 2 \cdot 2x \cdot 1 = (2x - 1)^2.$$

Таким образом, многочлен $4x^2 - 4x + 1$ разложили на множители, потому что $(2x - 1)^2$ — краткая запись произведения двух (одинаковых) множителей.

Пример 1. Разложить на множители:

а) $25k^2 + 30kp + 9p^2$; б) $64x^2 - 112xy + 49y^2$.

Решение.

а) $25k^2 + 30kp + 9p^2 = (5k)^2 + (3p)^2 + 2 \cdot 5k \cdot 3p =$

↓ по формуле квадрата суммы ↓

$$= (5k + 3p)^2;$$

б) $64x^2 - 112xy + 49y^2 = (8x)^2 + (7y)^2 - 2 \cdot 8x \cdot 7y =$

↓ по формуле квадрата разности ↓

$$= (8x - 7y)^2.$$

Пример 2. Разложить на множители многочлен

$4x^{2k} + 12x^k y^{3p} + 9y^{6p}$, где k, p — натуральные числа.

Решение. $4x^{2k} + 12x^k y^{3p} + 9y^{6p} =$
 $= (2x^k)^2 + (3y^{3p})^2 + 2 \cdot 2x^k \cdot 3y^{3p} = (2x^k + 3y^{3p})^2.$

Пример 3. Найти значение выражения

$$A = 25,17^2 + 50,34 \cdot 74,83 + 74,83^2.$$

Решение. Можно, конечно, просто выполнить указанные действия: возведение в квадрат, умножение, а затем сложение.

Но если заметить, что $50,34 = 2 \cdot 25,17$, то можно заменить данное выражение A квадратом суммы $A = (25,17 + 74,83)^2$, откуда легко находим

$$A = 100^2 = 10\,000.$$

Ответ: $A = 10\,000$.

Пример 4. Решить уравнение:

а) $16x^2 - 72x + 81 = 0$; б) $16x^4 - 72x^2 + 81 = 0$.

Решение. а) Так как

$$16x^2 - 72x + 81 = (4x)^2 + 9^2 - 2 \cdot 4x \cdot 9 = (4x - 9)^2,$$

то имеем равносильное данному уравнение

$$(4x - 9)^2 = 0.$$

Решая его, получаем $4x - 9 = 0$, откуда

$$x = 2,25.$$

б) Так как

$$16x^4 - 72x^2 + 81 = (4x^2)^2 + 9^2 - 2 \cdot 4x^2 \cdot 9 = (4x^2 - 9)^2,$$

то имеем равносильное данному уравнение

$$(4x^2 - 9)^2 = 0.$$

Решим его:

$$4x^2 - 9 = 0;$$

$$(2x - 3)(2x + 3) = 0;$$

$$x = 1,5 \text{ или } x = -1,5.$$

Ответ: а) 2,25; б) $\pm 1,5$.



1. Как используют при разложении на множители формулу квадрата разности?
2. Как используют при разложении на множители формулу квадрата суммы?

Упражнения

Разложите выражение на множители, используя формулу квадрата суммы (квадрата разности) (5.44—5.46).

- 5.44°. 1) $b^2 + 6b + 9$; 2) $y^2 - 6y + 9$;
 3) $a^2 + b^2 - 2ab$; 4) $2ab + b^2 + a^2$;
 5) $-2mn + m^2 + n^2$; 6) $m^2 + n^2 + 2mn$;
 7) $4x^2 + 4x + 1$; 8) $9a^2 - 6a + 1$;
 9) $4x^2 - 12x + 9$; 10) $16x^2 + 9 - 24x$.
- 5.45°. 1) $x^4 + 2x^2y + y^2$; 2) $a^4 - 2a^2b + b^2$;
 3) $9y^4 + 6xy^2 + x^2$; 4) $16m^2 - 8mp + p^2$;
 5) $x^4 - 2kx^2 + k^2$; 6) $25m^4 - 10m^2n + n^2$;
 7) $25a^4 - 10a^2y^2 + y^4$; 8) $4a^4 - 4a^2b^2 + b^4$;
 9) $36b^4 + 12b^2p^2 + p^4$; 10) $9m^4 + 6m^2n^2 + n^4$.
- 5.46°. 1) $9x^2y^2 + 12xyz + 4z^2$;
 2) $16m^2n^2 - 40mnk + 25k^2$;
 3) $0,64a^2b^2 + 0,64abc + 0,16c^2$;
 4) $0,36p^2q^2 - 0,6pqt + 0,25t^2$;
 5) $x^2 + x + \frac{1}{4}$;
 6) $\frac{1}{4}a^2 - a + 1$;
 7) $5\frac{44}{49}m^4p^6 - 4\frac{6}{7}m^2p^3 + 1$;
 8) $3\frac{6}{25}a^8 + 6a^4b^5 + 2\frac{7}{9}b^{10}$.

5.47. Замените знаки «?» одночленами так, чтобы получилось тождество:

- 1) $64x^2 - ? + ? = (? - 7y)^2$;
- 2) $9x^2 + 6x + 1 = (3x + ?)^2$;

- 3) $144a^2 + ? + 25b^2 = (? + ?)^2$;
- 4) $49x^2 - ? + ? = (? - 2)^2$;
- 5) $? - 126m^2n^4 + ? = (? - 9n^4)^2$;
- 6) $? + 2a^3b^2 + ? = (a^3 + ?)^2$;
- 7) $196c^2 + 140cd^5 + ? = (? + ?)^2$;
- 8) $9c^2 - ? + ? = (? - 4ab)^2$.

Найдите значение выражения (5.48—5.50).

5.48. 1) $A = 2,57^2 - 2 \cdot 2,57 \cdot 1,57 + 1,57^2$;

2) $B = 3,93^2 + 2 \cdot 3,93 \cdot 6,07 + 6,07^2$;

3) $C = \left(2\frac{5}{17}\right)^2 - 4\frac{10}{17} \cdot \frac{5}{17} + \left(\frac{5}{17}\right)^2$;

4) $D = 94,74^2 + 94,74 \cdot 10\frac{13}{25} + \left(5\frac{13}{50}\right)^2$.

5.49. 1) $K = \frac{0,32 \cdot 2,56 - 0,32 \cdot 1,27 + 0,71 \cdot 0,32}{5,17^2 - 2 \cdot 5,17 \cdot 3,17 + 3,17^2}$;

2) $P = \frac{19^2 - 38 \cdot 87 + 87^2}{61^2 - 2 \cdot 27 \cdot 61 + 27^2} + 3^2$;

3) $T = \frac{1992^2 - 2 \cdot 1993 \cdot 1992 - 1 + 1993^2}{\left(978\frac{17}{19} + 567\frac{2}{3} \cdot \frac{213,19}{97} - 25,8^3\right)^5}$;

4) $F = \frac{137^2 - 1600 - 194 \cdot 137 + 97^2}{1508,2934}$.

5.50. 1) $5x^2 - 10xy + 5y^2$ при $x = 164$, $y = 64$;

2) $100m^2 + 40mn + 4n^2$ при $m = -8$, $n = -10$;

3) $ax^2 + 2axy + ay^2$ при $x = 39$, $y = 61$, $a = \frac{1}{10}$;

4) $bm^2 - 2bmk + bk^2$ при $b = \frac{1}{8}$, $m = 5,79$, $k = 1,79$;

5) $\frac{1}{2}x^2 + xy + \frac{1}{2}y^2$ при $x = 5,2$, $y = 4,8$;

6) $\frac{1}{8}p^2 - \frac{1}{4}pt + \frac{1}{8}t^2$ при $p = 12,6$, $t = 4,6$.

5.51. Решите уравнение:

- 1) $49x^2 - 28x + 4 = 0$; 2) $25x^2 + 40x + 16 = 0$;
- 3) $x^2 + 24x + 144 = 0$; 4) $x^2 + 169 - 26x = 0$;
- 5) $\frac{4}{81}x^2 - \frac{4}{9}x + 1 = 0$; 6) $\frac{49}{100}x^2 + 1 + \frac{7}{5}x = 0$;
- 7) $0,5625x^2 + 0,6x + 0,16 = 0$;
- 8) $0,0625x^2 + 0,09 - 0,15x = 0$.

5.52*. Представьте в виде квадрата двучлена:

- 1) $9p^{2k} - 2 \cdot 6p^k q^{3t} + 4q^{6t}$;
- 2) $64p^{2n} + 16q^{8t} - 64p^n q^{4t}$;
- 3) $16x^{6k} + 40x^{3k}y^{2p} + 25y^{4p}$;
- 4) $100x^{10n} + 81y^{6t} - 2 \cdot 90x^{5n}y^{3t}$;
- 5) $16a^{4m+2n} + 2 \cdot 20a^{2m+n}b^{5q} + 25b^{10q}$;
- 6) $121a^{2k+8} + 169b^{8k} + 286a^{k+4}b^{4k}$;
- 7) $9z^{2n} - 12z^n t^{3m} + 4t^{6m}$;
- 8) $49m^{12k} + 144n^{4t} - 168m^{6k}n^{2t}$;
- 9) $9^{3n} + t^{2n} + 2t^n 3^{3n}$;
- 10) $25^{6n} + d^{8n} - 2 \cdot 5^{6n}d^{4n}$.

▲ 5.5. Разложение многочленов на множители с помощью формул суммы и разности кубов, куба суммы и куба разности

Если формулы куба суммы, куба разности, суммы кубов и разности кубов записать в виде:

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a + b)^3, \quad (1)$$

$$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a - b)^3, \quad (2)$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2), \quad (3)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2), \quad (4)$$

то получится разложение на множители многочленов, стоящих в левой части каждого из этих тождеств.

Тождество (3) читается так:



сумма кубов двух выражений равна произведению суммы этих выражений и неполного квадрата их разности.

Аналогично читается тождество (4):



разность кубов двух выражений равна произведению разности этих выражений и неполного квадрата их суммы.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Разложить на множители многочлен $27x^3 - 54x^2 + 36x - 8$.

Решение.

$$\begin{aligned} 27x^3 - 54x^2 + 36x - 8 &= \\ &= (3x)^3 - 3(3x)^2 \cdot 2 + 3 \cdot 3x \cdot 2^2 - 2^3 = \\ &\quad \downarrow \text{ по формуле (2) куба разности } \downarrow \\ &\quad \text{двух выражений получим} \\ &= (3x - 2)^3. \end{aligned}$$

Пример 2. Разложить на множители многочлен $64x^3y^6 + 125z^9$.

Решение.

$$\begin{aligned} 64x^3y^6 + 125z^9 &= (4xy^2)^3 + (5z^3)^3 = \\ &\quad \downarrow \text{ по формуле (3) суммы кубов двух выражений } \downarrow \\ &\quad \text{получим} \\ &= (4xy^2 + 5z^3)(16x^2y^4 - 20xy^2z^3 + 25z^6). \end{aligned}$$

Пример 3. Разложить на множители двучлен $1 - 729y^6$.

Решение.

$$1 - 729y^6 = 1^2 - (27y^3)^2 =$$

↓ по формуле разности квадратов двух выражений ↓
получим

$$= (1 - 27y^3)(1 + 27y^3) = (1 - (3y)^3)(1 + (3y)^3) =$$

↓ по формулам разности кубов и суммы кубов ↓
получим

$$= (1 - 3y)(1 + 3y + 9y^2)(1 + 3y)(1 - 3y + 9y^2).$$

Пример 4. Разложить на множители многочлен

$$8p^3 + 12p^2c + 6pc^2 + c^3.$$

Решение.

$$\begin{aligned} & 8p^3 + 12p^2c + 6pc^2 + c^3 = \\ & = (2p)^3 + 3(2p)^2c + 3 \cdot 2pc^2 + c^3 = \end{aligned}$$

↓ по формуле (1) куба суммы ↓
двух выражений получим

$$= (2p + c)^3.$$

Пример 5. Найти значение выражения

$$A = \frac{12,7^3 - 2,7^3}{12,7^2 + 12,7 \cdot 2,7 + 2,7^2}.$$

Решение.

$$\begin{aligned} A &= \frac{12,7^3 - 2,7^3}{12,7^2 + 12,7 \cdot 2,7 + 2,7^2} = \\ &= \frac{(12,7 - 2,7)(12,7^2 + 12,7 \cdot 2,7 + 2,7^2)}{12,7^2 + 12,7 \cdot 2,7 + 2,7^2} = 12,7 - 2,7 = 10. \end{aligned}$$

Ответ: $A = 10$.



1. На какие множители можно разложить сумму кубов двух выражений? Разность кубов двух выражений?
2. Разложите выражение $a^6 - b^6$ на множители двумя способами.

Упражнения

Разложите на множители (5.53—5.58).

- 5.53.** 1) $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$;
2) $x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$;
3) $k^3 - 6k^2n + 12kn^2 - 8n^3$;
4) $p^3 + 6p^2c + 12pc^2 + 8c^3$;
5) $125y^3 + 75y^2 + 15y + 1$;
6) $64 - 96d + 48d^2 - 8d^3$;
7) $\frac{1}{27}a^3 + 2a^2 + 36a + 216$;
8) $\frac{1}{125}b^3 - \frac{6}{25}b^2 + \frac{12}{5}b - 8$.
- 5.54.** 1) $m^6n^3 + 6m^4n^2p + 12m^2np^2 + 8p^3$;
2) $m^3n^{12} - 9m^2n^8p + 27mn^4p^2 - 27p^3$;
3) $m^9n^9 - 15m^6n^6p^2 + 75m^3n^3p^4 - 125p^6$;
4) $m^6n^{12} + 6m^4n^8p^3 + 12m^2n^4p^6 + 8p^9$;
5) $\frac{27}{64}m^3n^6 - \frac{9}{8}m^2n^4p^2 + mn^2p^4 - \frac{8}{27}p^6$;
6) $\frac{64}{125}m^3n^9 + \frac{12}{25}m^2n^6p^4 + \frac{3}{20}mn^3p^8 + \frac{1}{64}p^{12}$.
- 5.55.** 1) $27 - 8a^3$; 2) $125 - 8a^3$;
3) $27 + 64t^3$; 4) $64 + 343t^3$;
5) $1 - 125a^9$; 6) $1 - 216a^{12}$;
7) $1 + 512a^{15}$; 8) $1 + 729a^{18}$.
- 5.56.** 1) $27k^3 + 8b^3$; 2) $64a^3 - 125b^3$;
3) $\frac{1}{125}x^6 - \frac{1}{64}y^9$; 4) $\frac{1}{27}y^6 + \frac{1}{64}z^{12}$;
5) $\frac{1}{8}b^{12} + \frac{1}{27}a^9$; 6) $\frac{1}{125}a^6 - \frac{1}{8}b^9$.
- 5.57.** 1) $m^3n^3 - 1$; 2) $m^3n^3 - 125$;
3) $a^6b^3 - 27$; 4) $a^6b^3 + 64$;

$$5) a^6 b^6 + \frac{1}{343};$$

$$6) a^9 b^9 - \frac{8}{27};$$

$$7) \frac{64}{125} - a^{12} b^{15};$$

$$8) \frac{343}{512} - a^6 b^{18}.$$

$$5.58. 1) 125m^3 n^3 - 8t^6;$$

$$2) 1000m^6 n^3 + 64t^3;$$

$$3) 512m^{15} + 343n^9 k^{12};$$

$$4) 27m^6 - 216n^{21} k^{18};$$

$$5) \frac{27}{64} m^6 - \frac{125}{216} n^3 k^9;$$

$$6) \frac{64}{343} m^9 - \frac{27}{512} n^{12} k^{15};$$

$$7) 8^p - 125^t;$$

$$8) 64^m + 343^k;$$

$$9) \frac{125}{512} m^9 n^{12} - \frac{8}{729} k^3 t^6;$$

$$10) \frac{216}{343} m^6 n^{15} - \frac{1}{27} k^9 t^{12}.$$

5.59. Найдите значение выражения:

$$1) 27a^3 - 54a^2 b + 36ab^2 - 8b^3 \text{ при } a = 6, b = -\frac{1}{2};$$

$$2) 125a^3 + 600a^2 b + 960ab^2 + 512b^3 \text{ при } a = 0,5, b = \frac{1}{16};$$

$$3) (2a - 3b)(4a^2 + 6ab + 9b^2) - (-2a)^3 + (3b)^3 \text{ при } a = 0,5, b = -0,125;$$

$$4) (a^2 + b)(a^4 - a^2 b + b^2) + (a^2 - b)(a^4 + a^2 b + b^2) \text{ при } a = -0,5, b = 12,15.$$

5.60. Замените знаки «?» одночленами так, чтобы получилось тождество:

$$1) \left(\frac{2}{3} a^m - ? \right) (? + 2a^{3m} + ?) = ? - ?;$$

$$2) (? + ?) \left(\frac{1}{49} x^2 - \frac{1}{7} xy + ? \right) = ? + ?;$$

$$3) \left(? - \frac{1}{7} a^{2m+1} \right)^3 = \frac{1}{8} a^{15m+6} - ? + ? - ?;$$

$$4) \left(\frac{1}{5} a^{3n+1} + ? \right)^3 = ? + ? + ? + \frac{343}{512} a^{6m+6}.$$

▲ 5.6. Разложение многочленов на множители комбинацией различных способов

В предыдущих пунктах мы познакомились с различными способами разложения многочленов на множители. Однако часто каждый из этих способов в отдельности не приводит к цели, и для разложения многочлена на множители приходится пользоваться их комбинацией.

Пример 1. Разложить на множители многочлен

$$a^2 - m^4n^6 + b^2 - 2ab.$$

Решение. Сгруппируем первый, третий и четвертый члены:

$$a^2 - m^4n^6 + b^2 - 2ab = (a^2 + b^2 - 2ab) - m^4n^6 =$$

↓ применим формулу квадрата разности ↓

$$= (a - b)^2 - (m^2n^3)^2 =$$

↓ применим формулу разности квадратов ↓

$$= (a - b - m^2n^3)(a - b + m^2n^3).$$

Пример 2. Разложить на множители многочлен

$$x^2 - 5x - 6.$$

Решение. Здесь, прежде чем применить способ группировки, второе слагаемое $(-5x)$ заменим суммой двух подобных слагаемых $(-5x = x - 6x)$:

$$\begin{aligned} x^2 - 5x - 6 &= x^2 + x - 6x - 6 = (x^2 + x) + (-6x - 6) = \\ &= x(x + 1) - 6(x + 1) = (x + 1)(x - 6). \end{aligned}$$

Пример 3. Разложить на множители двучлен

$$x^4 + 4.$$

Решение. К данному многочлену прибавим $4x^2$ и вычтем $4x^2$:

$$x^4 + 4 = x^4 + 4 + 4x^2 - 4x^2 = (x^4 + 4 + 4x^2) - 4x^2 =$$

↓ применим формулу квадрата суммы ↓

$$= (x^2 + 2)^2 - (2x)^2 =$$

↓ применим формулу разности квадратов ↓

$$= (x^2 + 2 - 2x)(x^2 + 2 + 2x).$$

Упражнения

Разложите на множители (5.61—5.71).

- 5.61. 1) $2m^2 - 2n^2$; 2) $5m^2 - 5$; 3) $7 - 7n^2$;
4) $m^3 - 4m$; 5) $25n - n^3$; 6) $m^2 - m^4$;
7) $a^3 - a^5$; 8) $3a^5 - 3a^7$; 9) $6a^9 - 6a^7$.

- 5.62. 1) $\frac{1}{9}m^2n - \frac{1}{25}p^2n$; 2) $\frac{49}{100}a^2b - \frac{16}{81}c^2b$;
3) $50a^5b^2 - 2a^5c^2$; 4) $75m^2n^3 - 27p^2n^3$;
5) $300mn^3 - 48mn$; 6) $125ab - 80a^3b$;
7) $\frac{8}{9}a^3b - \frac{2}{49}ab^3$; 8) $\frac{3}{25}m^5n^3 - \frac{12}{121}m^3n^5$.

- 5.63. 1) $5(2a + b)^2 - 20c^2$; 2) $3(m - 3n)^2 - 27k^2$;
3) $7(3m - 2n)^2 - 112p^2$; 4) $6(5m + 2n)^2 - 54p^2$;
5) $\left(\frac{9}{8}b + 1\right)^2 - \frac{81}{16}b^2$; 6) $\left(1 - \frac{3}{5}m\right)^2 - \frac{16}{25}m^2$;
7) $1\frac{7}{9}a^2 - \left(\frac{1}{3}a - 1\right)^2$; 8) $2\frac{14}{25}b^2 - \left(1\frac{3}{5}b - 2\right)^2$.

- 5.64. 1) $25(3a - 2b)^2 - 16(5b - a)^2$;
2) $9(2a - 5b)^2 - 64(6b - 3a)^2$;
3) $64(5a + 3b)^2 - 81(3a - 2b)^2$;
4) $49(4a - 7b)^2 - 4(4b + 7a)^2$;
5) $81m^2n^2 - 9(4 - mn)^2$;
6) $100a^2b^2 - 16(ab - 3)^2$;
7) $121m^4n^4 - 25m^4(n^2 - 1)^2$;
8) $144a^6b^6 - 9b^6(a^3 + 1)^2$.

- 5.65. 1) $a^8 - 1$; 2) $a^{16} - 256$;
3) $16 - a^4$; 4) $81 - 10\,000a^8$;
5) $625b^8 - 16a^4$; 6) $256b^4 - 81a^8$.
- 5.66. 1) $9^n - (3^n - 1)^2$; 2) $25^n - (5^n + 1)^2$;
3) $(7^n + 4)^2 - 7^{2n}$; 4) $(8^n - 3)^2 - 8^{2n}$;
5) $(2^{n+2} + 2)^2 - 4^{n+2}$; 6) $(3^{n+4} - 5)^2 - 9^{n+4}$;
7) $36^n - 2^{2n}(3^n - 1)^2$; 8) $81^n - 3^{2n}(5^n + 1)^2$.
- 5.67. 1) $a^2 - b^2 - a - b$; 2) $a^2 - b^2 - a + b$;
3) $a + b + a^2 - b^2$; 4) $a - b + a^2 - b^2$;
5) $a^2 + a - b^2 - b$; 6) $a^2 + a - b^2 + b$.
- 5.68°. 1) $mn^2 - m - n^3 + n$;
2) $m^3 + m^2n - 25m - 25n$;
3) $mn^2 + 3m^2 - n^3 - 3n^2$;
4) $p^2k + 4p^2 - kb^2 - 4b^2$;
5) $a^3 - 5b^2 + 5a^2 - ab^2$;
6) $c^3 - 8c^2 - ck^2 + 8k^2$.
- 5.69. 1) $3a^2 - 24a + 48$; 2) $5a^2 + 50a + 125$;
3) $18b^2 - 60b + 50$; 4) $98 - 84b + 18b^2$;
5) $-10 - 160a - 640a^2$; 6) $-5 - 120a - 720a^2$;
7) $18mn^2 - 24mn + 8m$; 8) $45a + 30ab + 5ab^2$.
- 5.70. 1) $a^2 + 2ab + b^2 - p^2$; 2) $a^2 - 2ab + b^2 - k^2$;
3) $m^2 - n^2 - 8m + 16$; 4) $b^2 - a^2 - 12a - 36$;
5) $1 - 25a^2 + 10ab - b^2$; 6) $9 - m^2 + n^2 - 6n$;
7) $4a^2 + b^2 - 9c^2 - 4ab$;
8) $9a^2 + 4b^2 - 4c^2 + 12ab$.
- 5.71. 1) $(m - n)^2 + 2(m^2 - n^2) + (m + n)^2$;
2) $(m + n)^2 - 2(m^2 - n^2) + (m - n)^2$;
3) $(a - b)(a^2 + ab + b^2) - 3ab(a - b)$;
4) $(a + b)(a^2 - ab + b^2) + 3ab(a + b)$.
- 5.72*. Сократите дробь:
- 1) $\frac{25a^3 - 20a^2y + 4ay^2}{25a^2 - 4y^2}$; 2) $\frac{100x^3 - 80x^2y + 16xy^2}{100x^2 - 16y^2}$;

$$3) \frac{5x^2z + 10xyz + 5y^2z}{2x^2 - xz + 2xy - yz}; \quad 4) \frac{2a^2x^2 - 4a^2xy + 2a^2y^2}{5ax + 2xy - 5ay - 2y^2}.$$

5.73. Разложите многочлен на множители по образцу

$$\begin{aligned} x^2 + 5x - 6 &= x^2 + 6x - x - 6 = \\ &= x(x + 6) - (x + 6) = (x + 6)(x - 1): \end{aligned}$$

- | | |
|-----------------------|----------------------|
| 1) $x^2 - 2x - 3$; | 2) $x^2 + 3x - 10$; |
| 3) $x^2 + 4x - 5$; | 4) $x^2 - 5x + 6$; |
| 5) $x^2 - 11x + 10$; | 6) $x^2 - 9x - 10$; |
| 7) $x^2 - x - 20$; | 8) $x^2 - 9x + 20$. |

5.74*. При каких значениях переменной выражение не имеет смысла:

$$\begin{aligned} 1) \frac{5x - 4}{x^2 + 2x - 3}; \quad 2) \frac{3x + 7}{x^2 - x - 2}; \\ 3) \frac{3x + 2}{x^2 - 5x - 14}; \quad 4) \frac{2x - 5}{x^2 + 9x - 22}? \end{aligned}$$

Решите уравнение (5.75—5.76).

$$\begin{aligned} 5.75. \quad 1) x^4 - x^2 = 0; \quad 2) 9x^3 - x = 0; \\ 3) 2x^3 - 8x = 0; \quad 4) 3x^4 - 27x^2 = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5.76*. \quad 1) x^2 + 5x - 6 = 0; \quad 2) x^2 - 2x - 24 = 0; \\ 3) x^2 + 6x + 8 = 0; \quad 4) x^2 + 7x + 10 = 0. \end{aligned}$$

5.77. Разложите многочлен на множители по образцу

$$\begin{aligned} x^4 + x^2y^2 + y^4 &= x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - x^2y^2 = \\ &= (x^2 + y^2)^2 - (xy)^2 = (x^2 + y^2 - xy)(x^2 + y^2 + xy): \end{aligned}$$

- | | |
|----------------------------|------------------------------|
| 1) $a^4 + a^2b^2 + b^4$; | 2) $a^4b + a^2b^3 + b^5$; |
| 3) $a^8 + a^4b^4 + b^8$; | 4) $a^9 + a^5b^4 + ab^8$; |
| 5) $256 + 16b^4 + b^8$; | 6) $9a^6 + 81a^4 + a^8$; |
| 7) $a^5 + a^3b^2 + ab^4$; | 8) $a^6 + a^4b^2 + a^2b^4$. |

5.78. Разложите на множители двучлен:

- | | |
|---------------------|------------------------|
| 1) $a^4 + 0,25$; | 2) $b^4 + 64$; |
| 3) $x^4 + 324y^8$; | 4) $81m^4 + 4n^{12}$. |

5.79*. Найдите значение выражения:

$$1) \frac{\frac{16}{3}x^2 + \frac{8}{3}xy + \frac{1}{3}y^2}{\frac{2}{3}x + \frac{1}{6}y} \text{ при } x = 1,5, y = -2;$$

$$2) \frac{9x^2y - 6xy^2 + y^3}{0,5xy - \frac{y^2}{6}} \text{ при } x = \frac{7}{6}, y = -1,5;$$

$$3) \frac{m^2(m + 2n) - m - 2n}{m^2 + m + 2mn + 2n} \text{ при } m = -6, n = 13,75;$$

$$4) \frac{m^2(2n - 5) - 8n + 20}{2mn + 4n - 5m - 10} \text{ при } m = -8, n = -29,58.$$

Разложите на множители многочлен (5.80—5.81).

5.80. 1) $27x^3 + 27x^2y + 9xy^2 + y^3$;

2) $125a^3 - 150a^2 + 60a - 8$;

3) $\frac{1}{8}y^3 - \frac{3}{4}y^2 + \frac{3}{2}y - 1$;

4) $\frac{1}{27} + \frac{1}{3}z + z^2 + z^3$.

5.81. 1) $(x + y)^3 + z^3$;

2) $\frac{1}{8}a^3 - 27$;

3) $(a + 2)^3 - (a - 2)^3$;

4) $8 + a^3b^3$;

5) $x^6 - y^6$;

6) $\frac{1}{64}x^3 - \frac{1}{27}y^{18}$;

7) $(a + b)^3 + (m - b)^3$;

8) $(a - b)^3 - (a + m)^3$.

5.82*. Докажите тождество

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

и, используя его, разложите на множители многочлен:

1) $A = x^4 + y^6 + z^2 - 2x^2y^3 + 2x^2z - 2y^3z$;

2) $B = m^2 + n^8 + p^6 + 2mn^4 - 2mp^3 - 2n^4p^3$.

Глава 6

РАЦИОНАЛЬНЫЕ ДРОБИ

6.1. Рациональная дробь

В этой главе для обозначения многочленов мы будем пользоваться прописными буквами латинского алфавита $A, B, C, \dots$.

Рациональной дробью называется выражение вида $\frac{A}{B}$, где A и B — многочлены, $B \neq 0$.

Как и для обыкновенных дробей, A называется числителем дроби, B — ее знаменателем. Например,

$$\frac{2a-3}{a^2+3}, \quad \frac{3}{x^3-x}, \quad \frac{x^3-x}{3}$$

— рациональные дроби.

Здесь первая и третья дроби имеют смысл при любых значениях переменной. Вторая дробь не имеет смысла при $x=0$, $x=1$ и $x=-1$, так как при этих значениях переменной знаменатель обращается в нуль. Поскольку на нуль делить нельзя, то числа 0; 1 и -1 не входят в естественную область определения выражения $\frac{3}{x^3-x}$.

Напомним, что выражение с переменными всегда рассматривается вместе со своей областью определения. Поэтому



переменные, входящие в рациональную дробь, могут принимать лишь такие значения, при которых знаменатель этой дроби не обращается в нуль, т. е. дробь задается в естественной области определения (в области допустимых значений переменных).

Пример 1. Найти естественную область определения рациональной дроби:

а) $\frac{x}{x+2}$; б) $\frac{x}{x^2+2}$; в) $\frac{x+2}{x^2+2x}$.

Решение. а) Знаменатель дроби обращается в нуль при $x = -2$. Значит, естественная область определения состоит из всех чисел, кроме числа -2 .

б) Знаменатель дроби не обращается в нуль ни при каком значении x . Значит, естественная область определения состоит из всех чисел.

в) Знаменатель дроби обращается в нуль при $x = 0$ и при $x = -2$. Значит, естественная область определения состоит из всех чисел, кроме чисел 0 и -2 .

Ответ: а) $x \neq -2$; б) все числа; в) $x \neq 0$ и $x \neq -2$.

Всякий многочлен A можно представить в виде рациональной дроби, поскольку равенство $A = \frac{A}{1}$ является тождеством (при любых значениях переменных оно превращается в верное числовое равенство).

Например, $3s^2 - 2st + t^2 = \frac{3s^2 - 2st + t^2}{1}$.

Деление чисел обозначается как двумя точками, так и чертой дроби. Значит, при любых значениях A и $B \neq 0$ будет верным числовое равенство $A : B = \frac{A}{B}$. Поэтому дробь $\frac{A}{B}$ называется еще частным от деления A на B .

А

Дробями пользовались еще в Древнем Вавилоне и в Древнем Египте более 2000 лет до н. э. Использование черты дроби встречается в XIII в. в трудах Леонардо Пизанского, но общепринятым это стало только в XVI в.

В Средние века человек, овладевший действиями над дробями, считался исключительно образованным математиком.

Равенства

$$\frac{-A}{B} = -\frac{A}{B}; \quad \frac{A}{-B} = -\frac{A}{B} \quad (1)$$

являются тождествами. Эти тождества читаются так:



если в дроби изменить знак числителя или знак знаменателя, то дробь изменит знак.

Равенство

$$\frac{A}{B} \cdot B = A \quad (2)$$

также является тождеством. Это тождество читается так:



если дробь умножить на ее знаменатель, то получится ее числитель.

При каких значениях переменных значение рациональной дроби $\frac{A}{B}$ равно нулю? Разумеется, значение числителя A должно быть равно нулю, а значение знаменателя B не равно нулю, т. е.



$$\frac{A}{B} = 0, \text{ если } A = 0 \text{ и } B \neq 0.$$

Пример 2. При каких значениях x равно нулю значение дроби:

а) $\frac{x^2-9}{x+5}$; б) $\frac{x^2-9}{x+3}$?

Решение. а) Значение дроби $\frac{x^2-9}{x+5}$ равно нулю при $x^2-9=0$ и $x+5 \neq 0$, т. е. при $x^2=9$ и $x \neq -5$, другими словами, при $x=-3$ или $x=3$.

б) Значение дроби $\frac{x^2-9}{x+3}$ равно нулю при $x^2-9=0$ и $x+3 \neq 0$, т. е. при $x^2=9$ и $x \neq -3$, другими словами, при $x=3$.

Пример 3. Привести дробь $\frac{4}{y-x}$ к знаменателю $x-y$.

Решение. Согласно тождествам (1) имеем:

$$\frac{4}{y-x} = \frac{4}{-(x-y)} = -\frac{4}{x-y} = \frac{-4}{x-y}.$$

Пример 4. Упростить выражение

$$b + 2a + \frac{a-b}{a+b}(a+b).$$

Решение. Применяя тождество (2), получим:

$$b + 2a + \frac{a-b}{a+b}(a+b) = b + 2a + a - b = 3a.$$



1. Какое выражение называется рациональной дробью?
2. Какие значения могут принимать переменные, входящие в рациональную дробь?
3. Как многочлен представить в виде рациональной дроби?
4. Как изменится дробь, если изменить знак числителя? Знаменателя? Напишите соответствующие тождества.
5. Чему равно произведение дроби и ее знаменателя? Напишите соответствующее тождество.
6. При каких условиях значение рациональной дроби $\frac{A}{B}$ равно нулю?

Упражнения

- 6.1°. 1) Какие из чисел -5 ; -4 ; 0 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 могут входить в область определения дроби

$$\frac{x-5}{(x^3-125)(x-4)}?$$

- 2) Какие из чисел -7 ; -2 ; 0 ; 2 ; 3 ; 5 могут входить в область определения дроби $\frac{x^3+x^2+9x}{5x^3-15}$?

Найдите естественную область определения рациональной дроби (6.2—6.3).

6.2°. 1) $\frac{5}{3x^2-12}$; 2) $\frac{7}{x^2-25}$; 3) $\frac{3x}{8x+1}$;

4) $\frac{a}{3a^2-75}$; 5) $\frac{3x}{(x-4)^2}$; 6) $\frac{4}{(1-a)^2}$;

7) $\frac{3-a}{4-4x+x^2}$; 8) $\frac{5a}{9+6a+a^2}$; 9) $\frac{4}{y^2+9}$.

6.3°. 1) $\frac{x}{x^4+8}$; 2) $\frac{7}{x^8+2}$; 3) $\frac{7a-1}{3a^2-9a}$;

4) $\frac{a-2}{8a^2-2a}$; 5) $\frac{4x}{7x-x^2}$; 6) $\frac{3y-1}{y^2-3y}$;

7) $\frac{5x-2}{16-x^2}$; 8) $\frac{4n-5}{n^2-49}$; 9) $\frac{x-3}{x^2-100}$.

6.4*. При каких значениях x значение дроби равно нулю:

1) $\frac{x^2-16}{x+8}$; 2) $\frac{x^2-25}{x-9}$;

3) $\frac{x^2-16}{x-4}$; 4) $\frac{x^2-25}{x+5}$;

5) $\frac{4x^2+49+28x}{2-x}$; 6) $\frac{16x^2+81-72x}{10+x}$;

7) $\frac{4x^2-49}{(7-2x)(x-1)}$; 8) $\frac{16x^2-81}{(9-x)(9-4x)}$?

6.5°. Приведите дроби к общему знаменателю:

1) $\frac{2}{a-b}$ и $\frac{3}{b-a}$; 2) $\frac{4}{m-n}$ и $\frac{8}{n-m}$;

3) $\frac{10}{c-d}$ и $\frac{7}{d-c}$; 4) $\frac{3}{p-k}$ и $\frac{5}{k-p}$;

5) $\frac{-4}{t-p}$ и $\frac{-8}{p-t}$; 6) $\frac{-12}{d-m}$ и $\frac{-16}{m-d}$.

6.6°. Преобразуйте выражение, используя тождество (2):

$$1) A = m + 4n + \frac{m-n}{2m+2n} (2m+2n);$$

$$2) A = k - 8t - \frac{t+k}{3k-2t} (3k-2t);$$

$$3) A = \frac{a^2}{a-b} (a-b) + 3a^2 - 4ab + b^2;$$

$$4) A = \frac{25m^2+n^2}{4m+4n} (4m+4n) - 10mn;$$

$$5) A = \frac{c^2-d^2}{d+1} (d+1) + \frac{c^2+d^2}{c-1} (c-1) - c^2;$$

$$6) A = \frac{m^3+n^3}{m+2} (m+2) - \frac{m^3-n^3}{n-2} (n-2) - n^3.$$

6.2. Основное свойство дроби

Мы знаем, что если $\frac{a}{b}$ — обыкновенная дробь и $k \neq 0$ — целое число, то

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot k}{b \cdot k}.$$

Это равенство выражает *основное свойство обыкновенной дроби*. Из него следует, что для любой рациональной дроби $\frac{A}{B}$ и ненулевого многочлена K имеет место тождество

$$\frac{A}{B} = \frac{A \cdot K}{B \cdot K}. \quad (*)$$

Это тождество выражает *основное свойство рациональной дроби*; оно формулируется так:



если числитель и знаменатель рациональной дроби умножить на один и тот же ненулевой многочлен, то получится рациональная дробь, тождественно равная данной.

Умножая числитель и знаменатель рациональной дроби $\frac{A}{B}$ на ненулевой многочлен K , мы говорим, что *приводим ее к новому знаменателю* $B \cdot K$ (рис. 60).

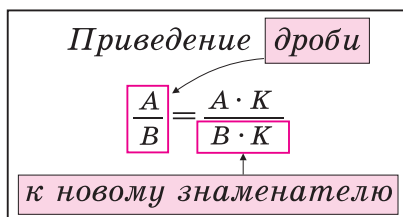


Рис. 60

Пример 1. Привести дробь $\frac{2a}{5c}$ к знаменателю $10c$.

Решение.

$$\frac{2a}{5c} = \frac{2a \cdot 2}{5c \cdot 2} = \frac{4a}{10c}.$$

Пример 2. Привести дробь $\frac{s-1}{s+1}$ к знаменателю $s^2 - 1$.

Решение. Используя основное свойство рациональной дроби, получим:

$$\frac{s-1}{s+1} = \frac{(s-1)(s-1)}{(s+1)(s-1)} = \frac{(s-1)^2}{s^2-1}.$$

Деление числителя и знаменателя дроби на их общий множитель K называется *сокращением дроби* на K (рис. 61). Для сокращения дроби нужно разложить ее числитель и знаменатель на множители, а затем разделить их на общие множители (если такие есть).

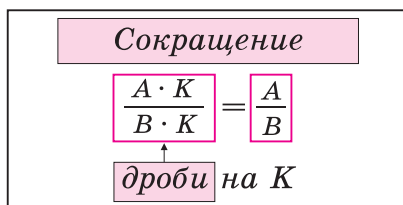


Рис. 61

Пример 3. Сократить дробь $\frac{-81x^5y^7}{63x^4y^6}$.

Решение.

$$\frac{-81x^5y^7}{63x^4y^6} = \frac{-9xy \cdot 9x^4y^6}{7 \cdot 9x^4y^6} = \frac{-9xy}{7}.$$

Пример 4. Сократить дробь $\frac{A}{B} = \frac{k^4 - 3k^2p}{k^2x + k^3y}$.

Решение.

$$\frac{A}{B} = \frac{k^4 - 3k^2p}{k^2x + k^3y} =$$

↓ разложим многочлены A и B на множители ↓

$$= \frac{k^2(k^2 - 3p)}{k^2(x + ky)} =$$

↓ разделим A и B на их общий множитель k^2 ↓

$$= \frac{k^2 - 3p}{x + ky}.$$

Ответ: $\frac{A}{B} = \frac{k^2 - 3p}{x + ky}$.

Пример 5. Сократить дробь $\frac{c^4p - 4c^3p^2 + 4c^2p^3}{c^3p - 4cp^3}$.

Решение.

$$\frac{c^4p - 4c^3p^2 + 4c^2p^3}{c^3p - 4cp^3} =$$

↓ разложим числитель и знаменатель на множители ↓

$$= \frac{c^2p(c - 2p)^2}{cp(c - 2p)(c + 2p)} =$$

↓ сократим дробь на общий множитель $cp(c - 2p)$ ↓

$$= \frac{c(c - 2p)}{c + 2p}.$$

▲ **Пример 6.** Сократить дробь $\frac{x^3 - y^3}{(x - y)^3}$.

Решение.

$$\frac{x^3 - y^3}{(x - y)^3} = \frac{(x - y)(x^2 + xy + y^2)}{(x - y)(x - y)^2} = \frac{x^2 + xy + y^2}{(x - y)^2}. \blacktriangle$$



1. Каким тождеством выражается основное свойство рациональной дроби?
2. Верно ли, что если к числителю и знаменателю обыкновенной дроби прибавить одно и то же число, то получится дробь, равная данной?

Упражнения

Сократите дробь (6.7—6.16).

6.7°. (Устно.)

$$\begin{array}{llll}
 1) \frac{14x^4}{49x^3}; & 2) \frac{3y^2}{42y}; & 3) \frac{15t^3}{6t^2}; & 4) \frac{11t^3}{22t}; \\
 5) \frac{-abc}{abk}; & 6) \frac{2abc}{-6kc}; & 7) \frac{-4y^4m}{-2y^3m}; & 8) \frac{t^5k^2p}{-t^2k}.
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 6.8^\circ. \quad 1) \frac{11a^2b^5c^3}{-121ab^3c^2}; & 2) \frac{-4x^3y^4z^5}{-12x^2y^3z^5}; \\
 3) \frac{-27t^2p^3m^4}{-9t^2p^2m^3}; & 4) \frac{-0,01c^4d^5x^4}{0,1c^2d^4x^3}.
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 6.9^\circ. \quad 1) \frac{27a(a-b)}{3a(b-a)}; & 2) \frac{2x(x-y)}{8x(y-x)}; \\
 3) \frac{4y(x-2y)}{16y(2y-x)}; & 4) \frac{14ab(a-1)}{2ab(1-a)}.
 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
 6.10^\circ. \quad 1) \frac{5a-5y}{25a}; & 2) \frac{3b}{6b-3a}; & 3) \frac{8m-2n}{12m+6n}; \\
 4) \frac{5a-10b}{15a+20b}; & 5) \frac{xy+xz}{xy-xz}; & 6) \frac{dx-dy}{dx+dy}; \\
 7) \frac{ay}{a^2-ab}; & 8) \frac{x^2}{xb+xc}.
 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
 6.11. \quad 1) \frac{5m-n}{(n-5m)^4}; & 2) \frac{4t-k}{(k-4t)^3}; & 3) \frac{a^2-a}{ad+al}; \\
 4) \frac{a^2-2ab}{ax+ay}; & 5) \frac{x^3-9x^2y}{9xy^2-x^2y}; & 6) \frac{a^2-3ay}{3y^2-ay};
 \end{array}$$

7) $\frac{a^3 + 2a^2b}{2a^3b^2 + a^4b};$

8) $\frac{a^3 + 4a^2b}{4a^2b^4 + a^3b^3};$

9) $\frac{12a^2 - 30ay}{30a^2y^2 - 12a^3y};$

10) $\frac{14m^5 + 7m^4n}{10mn^3 + 5n^4}.$

6.12°. 1) $\frac{m^2 - n^2}{m + n};$

2) $\frac{m - n}{m^2 - n^2};$

3) $\frac{(m - n)^3}{m - n};$

4) $\frac{m - n}{(n - m)^2};$

5) $\frac{25x^2 - 9y^2}{5x + 3y};$

6) $\frac{49p^2 - 4m^2}{7p - 2m};$

7) $\frac{36a^2 - 121b^2}{6a + 11b};$

8) $\frac{7p + 8t}{49p^2 - 64t^2}.$

6.13°. 1) $\frac{x^2y - x^2z}{x^2z^2 - x^2y^2};$

2) $\frac{5xy^2 - 6x^2y}{36yx^2 - 25y^3};$

3) $\frac{8a^2x - 10ax^2}{100x^3 - 64a^2x};$

4) $\frac{9xy^3 - 64xy}{8y + 3y^2}.$

6.14°. 1) $\frac{6 + 4x}{4x^2 - 9};$

2) $\frac{25 - x^2}{3x - 15};$

3) $\frac{36m^2 - 49n^2}{21n - 18m};$

4) $\frac{49 - 4x^2}{14 - 4x};$

5) $\frac{4a^2 - 36}{6 - 2a};$

6) $\frac{8b - 9a}{81a^2 - 64b^2};$

7) $\frac{6 - 4a}{16a^2 - 36};$

8) $\frac{100 - 36a^2}{6a - 10}.$

6.15°. 1) $\frac{49y^2 - 16a^2}{4a + 7y};$

2) $\frac{y^2 + 6y}{y^2 - 36};$

3) $\frac{5a - a^2}{25 - a^2};$

4) $\frac{8m + 8n}{n^2 - m^2};$

5) $\frac{m^2 - n^2}{cn - cm};$

6) $\frac{ay - ax}{x^2 - y^2};$

7) $\frac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2};$

8) $\frac{x^4 - y^4}{x^2 - y^2};$

9) $\frac{y^2 - d^2}{y^4m - d^4m};$

10) $\frac{3x^3y + 3xy^3}{x^4 - y^4}.$

6.16. 1) $\frac{y^2 - 4y + 4}{y - 2}$; 2) $\frac{2 + 3a}{9a^2 + 12a + 4}$;
 3) $\frac{b - 4}{16 - 8b + b^2}$; 4) $\frac{9y^2 - 6y + 1}{9y^2 - 1}$.

Определите, при каком значении переменной значение дроби равно нулю (6.17—6.18).

6.17*. 1) $\frac{|x| - 2}{4}$; 2) $\frac{4 - |x|}{3}$; 3) $\frac{x^2 - 25}{|x| - 5}$;
 4) $\frac{16 - x^2}{|x| + 4}$; 5) $\frac{|x| + 8}{x^2 - 64}$; 6) $\frac{|x| - 10}{100 - x^2}$.

6.18*. 1) $\frac{|x| - 8}{(x + 8)(x - 5)}$; 2) $\frac{|x| - 3}{(x - 3)(x + 2)}$;
 3) $\frac{|x| - x}{6 - x}$; 4) $\frac{x - |x|}{x + 7}$.

6.19. Найдите значение выражения:

1) $\frac{m^8 n^3 + m^6 n^5}{m^6 n^3}$ при $m = -4$, $n = -3$;
 2) $\frac{a^7 b^8 - a^4 b^{11}}{a^4 b^8}$ при $a = -2$, $b = -4$;
 3) $\frac{6a^3 - 24a}{3a^3 + 12a + 12a^2}$ при $a = -2,5$;
 4) $\frac{8b^3 - 72b}{4b^3 + 36b - 24b^2}$ при $b = 3,5$;
 5) $\frac{(2a - 2b)^2}{2b^2 - 2a^2}$ при $a = 6,75$, $b = 3,25$;
 6) $\frac{(3a + 3b)^2}{3b^2 - 3a^2}$ при $a = -12,65$, $b = 7,35$;
 7) $\frac{4m^2 + 100n^2 - 40mn}{15n - 3m}$ при $m = -5$, $n = -0,6$;
 8) $\frac{6a^2 + 24b^2 - 24ab}{4b - 2a}$ при $a = -2$, $b = -0,5$.

Решите уравнение (6.20—6.22).

6.20*. 1) $\frac{x^2 - 9}{x - 3} = 6$; 2) $\frac{4 - x^2}{x - 2} = 5$;
3) $\frac{16 - x^2}{x + 4} = 1$; 4) $\frac{x^2 - 25}{x + 5} = -1$;
5) $\frac{x^2 - 100}{x - 10} = -8$; 6) $\frac{x^2 - 121}{11 + x} = -4$.

6.21*. 1) $\frac{x + 2}{x + 2} = 1$; 2) $\frac{5 + x}{x + 5} = 1$;
3) $\frac{3 - x}{x - 3} = -1$; 4) $\frac{x - 7}{7 - x} = -1$.

6.22*. 1) $(x^2 - 9)\left(\frac{1}{x + 3} - 1\right) = 0$;
2) $\left(1 - \frac{1}{x - 2}\right)(x^2 - 4) = 0$;
3) $\left(2 + \frac{1}{x}\right)x^3 = 0$;
4) $\left(3 + \frac{1}{x - 1}\right)(x - 1)^3 = 0$.

6.23. Сократите дробь:

1) $\frac{9a^4b^2 - 18a^3b^3 + 9a^2b^4}{18a^2 - 18b^2}$;
2) $\frac{20x^2 + 40xy + 20y^2}{15x^2 - 15y^2}$;
3) $\frac{15x^3 - 15x^2 - 15x + 15}{10x^5 - 20x^3 + 10x}$;
4) $\frac{12x^5y + 24x^4y + 12x^3y}{6x^5y + 18x^4y + 18x^3y + 6x^2y}$;
5) $\frac{21a^2b - 42ab^2 + 21b^3}{7a^3 - 7ab^2}$;

$$6) \frac{18a^4b^2 - 36a^3b^2 + 18a^2b^2}{27a^3 - 27a};$$

$$7) \frac{7a^2 + 14a + 14}{(a+1)^4 - 1}; \quad 8) \frac{(a-3)^4 - 81}{2a^2 - 12a + 36}.$$

6.3. Приведение дробей к общему знаменателю

Используя основное свойство дроби, две дроби $\frac{A}{B}$ и $\frac{C}{D}$ можно *привести к общему знаменателю* (рис. 62). Конечно, проще всего привести их к общему знаменателю $B \cdot D$ (это произведение знаменателей данных дробей):

$$\frac{A}{B} = \frac{A \cdot D}{B \cdot D};$$

$$\frac{C}{D} = \frac{B \cdot C}{B \cdot D}.$$

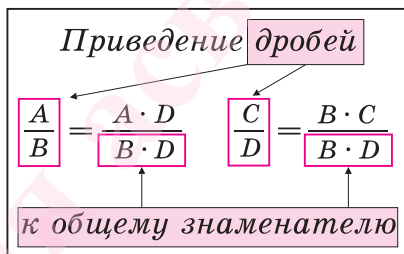


Рис. 62

Пример 1. Привести дроби $\frac{3a-1}{a+2}$ и $\frac{4a+7}{a-2}$ к общему знаменателю.

Решение. Общий знаменатель данных дробей равен $(a+2)(a-2)$; следовательно, получим:

$$\frac{3a-1}{a+2} = \frac{(3a-1)(a-2)}{(a+2)(a-2)} = \frac{3a^2 - 7a + 2}{a^2 - 4};$$

$$\frac{4a+7}{a-2} = \frac{(4a+7)(a+2)}{(a-2)(a+2)} = \frac{4a^2 + 15a + 14}{a^2 - 4}.$$

Приводя дроби $\frac{3a-1}{a+2}$ и $\frac{4a+7}{a-2}$ к общему знаменателю, мы умножали числитель и знаменатель каждой из них соответственно на двучлен $a-2$ и на двучлен $a+2$. Двучлен $a-2$ называется *допол-*

нтельным множителем первой дроби, а двучлен $a + 2$ — дополнительным множителем второй дроби.

Пример 2. Привести дроби $\frac{5}{2a}$, $\frac{c}{3b}$, $\frac{7}{m+1}$ к общему знаменателю.

Решение. Общий знаменатель этих дробей равен произведению их знаменателей:

$$2a \cdot 3b \cdot (m+1), \text{ т. е. } 6ab(m+1).$$

Итак, получим:

$$\frac{5}{2a} = \frac{5 \cdot 3b(m+1)}{2a \cdot 3b(m+1)} = \frac{15b(m+1)}{6ab(m+1)}$$

($3b(m+1)$ — дополнительный множитель первой дроби);

$$\frac{c}{3b} = \frac{c \cdot 2a(m+1)}{3b \cdot 2a(m+1)} = \frac{2ac(m+1)}{6ab(m+1)}$$

($2a(m+1)$ — дополнительный множитель второй дроби);

$$\frac{7}{m+1} = \frac{7 \cdot 6ab}{(m+1)6ab} = \frac{42ab}{6ab(m+1)}$$

($6ab$ — дополнительный множитель третьей дроби).



Когда многочлены B и D имеют общий множитель, то для дробей $\frac{A}{B}$ и $\frac{C}{D}$ можно найти общий знаменатель, который содержит меньше множителей, чем произведение $B \cdot D$.

Пример 3. Привести дроби $\frac{5}{12a^2b^3}$ и $\frac{7}{10ab^4c}$ к общему знаменателю.

Решение. Общим знаменателем этих дробей является произведение их знаменателей $120a^3b^7c$, но здесь можно найти более простой общий знаменатель.

Этот общий знаменатель должен делиться на числа 12 и 10, значит, должен делиться на их наименьшее общее кратное, т. е. на число НОК ($12; 10$) = 60.

Он должен делиться также на a^2 и a , на b^3 и b^4 , на c , т. е. должен делиться на a^2b^4c .

Мы видим, что в качестве общего знаменателя данных дробей можно взять выражение $60a^2b^4c$ (обычно при нахождении общего знаменателя указывают знаменатель наиболее простого вида).

Чтобы найти дополнительные множители данных дробей, надо общий знаменатель разделить на знаменатель каждой из этих дробей. Дополнительный множитель первой дроби — $(60a^2b^4c) : (12a^2b^3) = 5bc$, дополнительный множитель второй дроби — $(60a^2b^4c) : (10ab^4c) = 6a$.

Итак,

$$\frac{5}{12a^2b^3} = \frac{5 \cdot 5bc}{12a^2b^3 \cdot 5bc} = \frac{25bc}{60a^2b^4c};$$

$$\frac{7}{10ab^4c} = \frac{7 \cdot 6a}{10ab^4c \cdot 6a} = \frac{42a}{60a^2b^4c}.$$



В тетради решение этого примера можно оформить следующим образом.

Решение. Общий знаменатель

$$60a^2b^4c = 12a^2b^3 \cdot 5bc = 10ab^4c \cdot 6a.$$

Дополнительные множители: $5bc$, $6a$.

$$\frac{\overset{5bc}{5}}{12a^2b^3} = \frac{5 \cdot 5bc}{12a^2b^3 \cdot 5bc} = \frac{25bc}{60a^2b^4c};$$

$$\frac{\overset{6a}{7}}{10ab^4c} = \frac{7 \cdot 6a}{10ab^4c \cdot 6a} = \frac{42a}{60a^2b^4c}.$$

Пример 4. Привести дроби $\frac{15}{a^2c^2 - a^2p^2}$ и $\frac{9}{a^3c + a^3p}$ к общему знаменателю.

Решение. Разложим знаменатель каждой дроби на множители:

$$1) a^2c^2 - a^2p^2 = a^2(c^2 - p^2) = a^2(c - p)(c + p);$$

$$2) a^3c + a^3p = a^3(c + p).$$

В первый знаменатель входит множитель a^2 , а во второй — a^3 , значит, в общий знаменатель войдет a^3 . В общий знаменатель войдут также множители $(c - p)$ и $(c + p)$. Тогда

$a^3(c - p)(c + p)$ — общий знаменатель;

a — дополнительный множитель первой дроби;

$(c - p)$ — дополнительный множитель второй дроби (поясните почему).

Итак,

$$\frac{\cancel{a} \overline{15}}{a^2 \cancel{c^2} - a^2 p^2} = \frac{15a}{a^3(c - p)(c + p)};$$

$$\frac{\cancel{c-p} \overline{9}}{a^3 \cancel{c} + a^3 p} = \frac{9(c - p)}{a^3(c - p)(c + p)}.$$



Таким образом, чтобы привести рациональные дроби с различными знаменателями к общему знаменателю, нужно:

- 1) разложить знаменатель каждой данной дроби на множители;
- 2) найти общий знаменатель и записать его в знаменателе каждой новой дроби;
- 3) найти дополнительные множители каждой из данных дробей (для чего разделить общий знаменатель на знаменатель каждой дроби);
- 4) выполнить умножение числителя каждой дроби на ее дополнительный множитель и записать полученное произведение в числителе новой дроби.



1. Как найти общий знаменатель дробей, если их знаменатели не имеют общих множителей?
2. Как найти дополнительные множители каждой из дробей при приведении их к общему знаменателю, если общий знаменатель уже найден?

Упражнения

Приведите к общему знаменателю дроби (6.24—6.25).

6.24. 1) $\frac{7}{a^5}$ и $\frac{b}{a^7}$; 2) $\frac{9}{p^7}$ и $\frac{k}{p^{10}}$;
3) $\frac{5}{(m-3)^4}$ и $\frac{7a}{(m-3)^2}$; 4) $\frac{3}{(n+2)^7}$ и $\frac{2p}{(n+2)^3}$.

6.25. 1) $\frac{a}{1}$ и $\frac{2b}{3c}$; 2) $\frac{m}{1}$ и $\frac{5k}{4t}$;
3) a и $\frac{5t}{7p}$; 4) t и $\frac{9p}{4n}$;
5) $\frac{1}{p+3}$ и p ; 6) $\frac{2}{m-4}$ и m .

6.26. Найдите общий знаменатель дробей:

1) $\frac{5}{z}$ и $\frac{-71}{z^3}$; 2) $\frac{17}{b}$ и $\frac{-5}{b^4}$;
3) $\frac{6x}{5a}$ и $\frac{7y}{10ab}$; 4) $\frac{5y}{7x}$ и $\frac{13m}{21xy}$;
5) $\frac{1}{3a}$, $\frac{y}{4b}$ и $\frac{5}{2x-3}$; 6) $\frac{2}{5x}$, $\frac{a}{3y}$ и $\frac{4}{3m+2}$.

6.27. Приведите дроби из упражнения 6.26 к общему знаменателю.

6.28. Приведите к общему знаменателю дроби:

1) $\frac{1}{7x-y}$ и $\frac{2}{y-7x}$; 2) $\frac{3}{a+5b}$ и $\frac{4}{-a-5b}$;
3) $\frac{6}{2a-2b}$ и $\frac{12}{3b-3a}$; 4) $\frac{15}{5m-5n}$ и $\frac{30}{6n-6m}$.

Найдите общий знаменатель дробей и укажите дополнительный множитель каждой из них (6.29—6.31).

6.29. 1) $\frac{2b}{7}$ и $\frac{c}{14}$; 2) $\frac{3c}{5}$ и $\frac{a}{15}$;
3) $\frac{x}{16}$ и $\frac{y}{24}$; 4) $\frac{k}{18}$ и $\frac{t}{24}$;

5) $\frac{7}{18c}$ и $\frac{5a}{8c^3}$;

6) $\frac{8}{49p^2}$ и $\frac{q}{14p}$;

7) $\frac{3}{7a^2p^3x}$ и $\frac{4}{21a^3px^5}$;

8) $\frac{5}{8p^3t^4y^5}$ и $\frac{3b}{14pt^3y^2}$.

6.30. 1) $\frac{a}{2(b+1)}$ и $\frac{x}{3(1+b)}$;

2) $\frac{m}{5(t+2)}$ и $\frac{n}{2(2+t)}$;

3) $\frac{2}{3(n-5)}$ и $\frac{1}{2(n+5)}$;

4) $\frac{k}{2(p-3)}$ и $\frac{t}{3(p+3)}$.

6.31. 1) $\frac{5}{7a^2-7}$; $\frac{1}{4a+4}$; $\frac{1-a}{3a-3}$;

2) $\frac{11}{8b^2-32}$; $\frac{7}{4b-8}$; $\frac{2+b}{3b+6}$;

3) $\frac{1}{n^2+2n+1}$; $\frac{5n}{n+1}$; $\frac{n+1}{n-1}$;

4) $\frac{b}{b^2-2b+1}$; $\frac{7}{1-b}$; $\frac{2+b}{1+b}$.

6.4. Сложение и вычитание дробей с одинаковыми знаменателями



Напомним, что обыкновенные дроби с одинаковыми знаменателями складывают по правилу

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}.$$

Отсюда следует, что для любых рациональных дробей $\frac{A}{C}$ и $\frac{B}{C}$ имеет место тождество

$$\frac{A}{C} + \frac{B}{C} = \frac{A+B}{C}.$$

Это тождество выражает *правило сложения рациональных дробей с одинаковыми знаменателями* и читается так:



сумма рациональных дробей с одинаковыми знаменателями является дробью с таким же знаменателем, числитель которой равен сумме числителей дробей-слагаемых.

При вычитании рациональных дробей с одинаковыми знаменателями используют тождество

$$\frac{A}{C} - \frac{B}{C} = \frac{A - B}{C}.$$

Пример 1. Выполнить действия с дробями:

а) $\frac{p+5}{k^3x^2} - \frac{p-8}{k^3x^2}$; б) $\frac{3x}{9x^2-4y^2} + \frac{2y}{9x^2-4y^2}.$

Решение.

а) $\frac{p+5}{k^3x^2} - \frac{p-8}{k^3x^2} = \frac{p+5-(p-8)}{k^3x^2} = \frac{p+5-p+8}{k^3x^2} = \frac{13}{k^3x^2};$

б) $\frac{3x}{9x^2-4y^2} + \frac{2y}{9x^2-4y^2} = \frac{3x+2y}{9x^2-4y^2} =$

↓ сократим полученную дробь ↓

$$= \frac{3x+2y}{(3x-2y)(3x+2y)} = \frac{1}{3x-2y}.$$

Замечание. Дроби, которые получаются в результате выполнения действий, принято сокращать (если это возможно).

▲ **Пример 2.** Выполнить вычитание дробей

$$\frac{c^2}{c^3+p^3} - \frac{cp-p^2}{c^3+p^3}.$$

Решение.

$$\frac{c^2 - cp + p^2}{c^3 + p^3} = \frac{c^2 - cp + p^2}{(c+p)(c^2 - cp + p^2)} = \frac{1}{c+p}. \quad \blacktriangle$$



1. Сформулируйте правило сложения рациональных дробей с одинаковыми знаменателями.
2. Сформулируйте правило вычитания рациональных дробей с одинаковыми знаменателями.

Упражнения

Выполните действия с дробями (6.32—6.36).

6.32. (Устно.)

1) $\frac{a}{5} - \frac{4}{5};$

2) $\frac{5}{9} - \frac{c}{9};$

3) $\frac{1}{6} - \frac{b}{6};$

4) $\frac{c}{12} + \frac{5}{12};$

5) $\frac{2c}{9} + \frac{4c}{9} - \frac{5}{9};$

6) $\frac{3}{11} + \frac{4}{11} - \frac{c}{11};$

7) $\frac{2d}{k} - \frac{4d}{k} + \frac{5}{k};$

8) $\frac{6}{m} + \frac{4}{m} + \frac{a}{m}.$

6.33°. 1) $\frac{m+n}{3x} + \frac{2n-m}{3x};$

2) $\frac{a^2+b}{x^2} + \frac{b-a^2}{x^2};$

3) $\frac{4x-a}{2y} - \frac{8x-a}{2y};$

4) $\frac{8c+4d-5}{4b} - \frac{4d+3}{4b};$

5) $\frac{m+n}{3d^3t} - \frac{-m-n}{3d^3t};$

6) $\frac{m+n}{d^2y^3} - \frac{m+n}{d^2y^3}.$

6.34°. 1) $\frac{x-y}{4z} + \frac{x}{4z};$

2) $\frac{x+y}{6z} - \frac{y}{6z};$

3) $\frac{c+d}{7t} - \frac{c-d}{7t};$

4) $\frac{3y+1}{8t} - \frac{y}{8t};$

5) $\frac{2a+4}{3b} - \frac{5a+10}{3b};$

6) $\frac{2x-3y}{5a} - \frac{y-x}{5a};$

7) $\frac{a-2}{11k} + \frac{a+3}{11k} - \frac{a-4}{11k};$

8) $\frac{4y+1}{5c} - \frac{3y-1}{5c} + \frac{2y+1}{5c}.$

6.35. 1) $\frac{a}{a-b} - \frac{b}{a-b};$

2) $\frac{c}{c+d} - \frac{-d}{c+d};$

3) $\frac{8bc+16b^2}{5a} - \frac{3bc+b^2}{5a};$

4) $\frac{5ak+20a^2}{8b} - \frac{4a^2-3ak}{8b};$

$$\begin{array}{ll} 5) \frac{(2-b)^2}{4b} + \frac{(b+2)^2}{4b}; & 6) \frac{(3+y)^2}{3y} - \frac{(3-y)^2}{3y}; \\ 7) \frac{x}{x^2-4y^2} - \frac{2y}{x^2-4y^2}; & 8) \frac{m}{m^2-16n^2} - \frac{4n}{m^2-16n^2}. \end{array}$$

6.36°.

$$\begin{array}{ll} 1) \frac{y-k}{x-b} + \frac{y+k}{x-b}; & 2) \frac{3b+8}{k-4} + \frac{b+4}{k-4}; \\ 3) \frac{1-y}{a-b} - \frac{1-2y}{a-b}; & 4) \frac{2a-3b}{m+n} - \frac{4a-5b}{m+n}; \\ 5) \frac{5y}{y^2-9} - \frac{15}{y^2-9}; & 6) \frac{5m}{m^2-16} + \frac{20}{m^2-16}; \\ 7) \frac{y^2+8y}{4-y^2} - \frac{4y-4}{4-y^2}; & 8) \frac{y^2+5y}{25-y^2} - \frac{15y-25}{25-y^2}; \\ 9) \frac{4m^3-5m}{3m^2+12m+12} + \frac{3m^2-2m}{3m^2+12m+12} - \frac{3m^2+9m}{3m^2+12m+12}; \\ 10) \frac{3n^3+5n}{2n^2-12n+18} - \frac{18+3n^3+2n}{2n^2-12n+18} + \frac{2n^2+3n}{2n^2-12n+18}. \end{array}$$

6.5. Сложение и вычитание дробей с разными знаменателями (знаменатели — одночлены)

Сложение и вычитание рациональных дробей с разными знаменателями сводится к сложению и вычитанию дробей с одинаковыми знаменателями. Для этого дроби приводят к общему знаменателю и складывают по правилу сложения рациональных дробей с одинаковыми знаменателями.

Итак, для сложения дробей $\frac{A}{B}$ и $\frac{C}{D}$ приведем их к общему знаменателю, например $B \cdot D$ (хотя на практике часто находят более удобный общий знаменатель):

$$\frac{A}{B} = \frac{A \cdot D}{B \cdot D}; \quad \frac{C}{D} = \frac{B \cdot C}{B \cdot D}.$$

Тогда имеем

$$\frac{A}{B} + \frac{C}{D} = \frac{A \cdot D}{B \cdot D} + \frac{B \cdot C}{B \cdot D} = \frac{A \cdot D + B \cdot C}{B \cdot D}.$$

Аналогично для вычитания рациональных дробей с разными знаменателями:

$$\frac{A}{B} - \frac{C}{D} = \frac{A \cdot D}{B \cdot D} - \frac{B \cdot C}{B \cdot D} = \frac{A \cdot D - B \cdot C}{B \cdot D}.$$

Пример 1. Найти разность $\frac{5}{2ab} - \frac{7}{6ac}$.

Решение. Общий знаменатель:

$$6abc = 2ab \cdot 3c = 6ac \cdot b.$$

Дополнительные множители: $3c$ и b .

$$\frac{\cancel{3c} 5}{2ab} - \frac{\cancel{b} 7}{6ac} = \frac{5 \cdot 3c}{6abc} - \frac{7 \cdot b}{6abc} = \frac{15c - 7b}{6abc}.$$

Пример 2. Вычесть из рациональной дроби $\frac{3}{4a^2m^2}$ дробь $\frac{7}{6a^3mp}$.

Решение. НОК (4; 6) = 12; общий знаменатель:

$$12a^3m^2p = 4a^2m^2 \cdot 3ap = 6a^3mp \cdot 2m.$$

Дополнительные множители: $3ap$ и $2m$.

$$\frac{\cancel{3ap} 3}{4a^2m^2} - \frac{\cancel{2m} 7}{6a^3mp} = \frac{3 \cdot 3ap}{12a^3m^2p} - \frac{7 \cdot 2m}{12a^3m^2p} = \frac{9ap - 14m}{12a^3m^2p}.$$

Пример 3. Найти сумму $\frac{2}{15x^2y^3z} + \frac{3}{25xyz^4}$.

Решение.

$$\text{НОК}(15; 25) = \text{НОК}(3 \cdot 5; 5^2) = 3 \cdot 5^2 = 75.$$

Общий знаменатель:

$$75x^2y^3z^4 = 15x^2y^3z \cdot 5z^3 = 25xyz^4 \cdot 3xy^2.$$

Дополнительные множители: $5z^3$ и $3xy^2$.

$$\begin{aligned} \frac{\cancel{5z^3}^2}{15x^2y^3z} + \frac{\cancel{3xy^2}_3}{25xyz^4} &= \frac{2 \cdot 5z^3}{75x^2y^3z^4} + \frac{3 \cdot 3xy^2}{75x^2y^3z^4} = \\ &= \frac{10z^3}{75x^2y^3z^4} + \frac{9xy^2}{75x^2y^3z^4} = \frac{10z^3 + 9xy^2}{75x^2y^3z^4}. \end{aligned}$$

Пример 4. Выполнить действия

$$\frac{5}{6y} - 3y^3 + \frac{1}{8y^2}.$$

Решение. Перепишем одночлен $3y^3$ в виде дроби $\frac{3y^3}{1}$.

НОК (6; 8) = 24; общий знаменатель:

$$24y^2 = 6y \cdot 4y = 1 \cdot 24y^2 = 8y^2 \cdot 3.$$

Дополнительные множители: $4y$, $24y^2$, 3 .

$$\begin{aligned} \frac{\cancel{4y}^5}{6y} - \frac{\cancel{24y^2}^3 3y^3}{1} + \frac{\cancel{3}^1}{8y^2} &= \frac{5 \cdot 4y - 3y^3 \cdot 24y^2 + 1 \cdot 3}{24y^2} = \\ &= \frac{20y - 72y^5 + 3}{24y^2}. \end{aligned}$$



Покажем еще один способ оформления решения этого примера — «цепочкой» (здесь не выписывают отдельно общий знаменатель и дополнительные множители, а находят их устно, разложив сначала на множители знаменатель каждой дроби):

$$\begin{aligned} \frac{5}{6y} - 3y^3 + \frac{1}{8y^2} &= \frac{\cancel{4y}^5}{2 \cdot 3y} - \frac{\cancel{24y^2}^3 3y^3}{1} + \frac{\cancel{3}^1}{2^3 y^2} = \\ &= \frac{5 \cdot 4y - 3y^3 \cdot 24y^2 + 1 \cdot 3}{24y^2} = \frac{20y - 72y^5 + 3}{24y^2}. \end{aligned}$$



1. Как сложить две рациональные дроби с разными знаменателями?
2. Как найти разность рациональных дробей с разными знаменателями?

Упражнения

Выполните действия (6.37—6.42).

6.37°. (Устно.)

- 1) $\frac{3a}{4} + \frac{2}{7}$; 2) $\frac{4}{9} + \frac{2a}{3}$; 3) $\frac{b}{4} - \frac{3}{8}$;
4) $\frac{2}{5} - \frac{3b}{7}$; 5) $\frac{k}{2} - \frac{3}{a}$; 6) $\frac{1}{3} - \frac{1}{a}$;
7) $3 - \frac{2}{d}$; 8) $\frac{4}{c} + 5$; 9) $12 + \frac{4}{m}$;
10) $\frac{6}{k} - 9$.

- 6.38°.** 1) $\frac{x}{5} + \frac{2x}{15} + \frac{4x}{20}$; 2) $\frac{2a}{16} - \frac{3a}{8} + \frac{a}{12}$;
3) $\frac{5x}{14} - \frac{9x}{35} + \frac{6x}{10}$; 4) $\frac{4m}{28} - \frac{3m}{21} + \frac{m}{42}$;
5) $3 + \frac{4}{z} - \frac{5}{z^2}$; 6) $6 - \frac{3}{a} - \frac{2}{a^2}$;
7) $\frac{4}{m} + 8 - \frac{3}{m^2}$; 8) $4 - \frac{1}{k} - \frac{1}{k^2}$.

- 6.39.** 1) $\frac{6x}{7b} - \frac{5x}{14b}$; 2) $\frac{3b}{8a} - \frac{5b}{12a}$;
3) $\frac{4b}{9y} - \frac{7b}{27y}$; 4) $\frac{2b}{3x} + \frac{7b}{6x}$;
5) $\frac{7}{30xz} - \frac{2}{45xy}$; 6) $\frac{c}{24mn} + \frac{d}{18nt}$;
7) $\frac{2a}{27xy} - \frac{5}{18xz}$; 8) $\frac{7k}{12xy} + \frac{11}{30xt}$.

- 6.40°.** 1) $\frac{5x-4}{4} - \frac{3x-3}{3}$; 2) $\frac{c-3p}{12} + \frac{2p+5c}{8}$;
3) $\frac{4p-3}{8} - \frac{p+1}{6}$; 4) $\frac{4x-2y}{15} + \frac{x+4y}{12}$;
5) $\frac{5x+3}{5} - \frac{2x-4}{7}$; 6) $\frac{4b-3d}{18} - \frac{3b-2d}{12}$;
7) $\frac{7x^2-y^2}{5} + \frac{x^2+2y^2}{6}$; 8) $\frac{2x^2-5y^2}{4} + \frac{3x^2-y^2}{10}$.

6.41°. 1) $\frac{2}{mn} + \frac{3}{md}$; 2) $\frac{-7}{ab} - \frac{2}{bk}$;
3) $\frac{1}{m^2n} - \frac{2}{m^2n^2}$; 4) $\frac{4}{x^2} - \frac{3}{xy^2} + \frac{5}{x^2y}$;
5) $\frac{2m-3n}{m} + \frac{4m^2-5n^2}{mn}$;
6) $\frac{5m^2-n^2}{mn} - \frac{3m-2n}{n}$;
7) $\frac{2m^2+3an}{mn} - \frac{am+5mn}{an}$;
8) $\frac{3m^2+5an}{am} + \frac{n^2-3am}{mn}$.

6.42. 1) $\frac{2a}{5x} - \frac{4}{25x^2}$;
2) $\frac{5}{7a^2y} - \frac{6}{3ay^2}$;
3) $\frac{3}{5y^2} - \frac{14}{15x^2y} + \frac{7}{20x^2}$;
4) $\frac{m}{c^2d^2} + \frac{m}{c^2d} - \frac{m}{cd^2}$;
5) $\frac{b}{2m^2n} + \frac{b}{4mn^2} - \frac{b}{8m^2n^2}$;
6) $\frac{1-2y^2}{2y^2} + \frac{y^3+8}{8} - \frac{y^4-2}{8y}$;
7) $\frac{25mn+9}{15m^2n^2} - \frac{4mn+5}{3mn} + \frac{4}{5}$;
8) $\frac{2y^2-a^2}{2ay} + \frac{a+y}{y} - \frac{a-y}{a}$;
9) $\frac{(3y-x)^2}{2x} - \frac{(x+y)^2}{y} + \frac{3x+4y}{2}$;
10) $\frac{(x+2y)^2}{3x} - \frac{(3x-y)^2}{6y} - \frac{8x+7y}{6}$.

6.6. Сложение и вычитание дробей с разными знаменателями (знаменатели — произвольные)

Рассмотрим несколько более сложных примеров сложения и вычитания рациональных дробей с разными знаменателями, когда хотя бы один из знаменателей не является одночленом.

Пример 1. Найти сумму:

$$\text{а) } \frac{5}{3a} + \frac{2}{a-b}; \quad \text{б) } \frac{5}{3a+b} + \frac{2}{a-b}.$$

Решение.

$$\begin{aligned} \text{а) } \frac{5}{3a} + \frac{2}{a-b} &= \frac{5(a-b)}{3a(a-b)} + \frac{3a \cdot 2}{3a(a-b)} = \\ &= \frac{5(a-b) + 3a \cdot 2}{3a(a-b)} = \frac{5a - 5b + 6a}{3a(a-b)} = \frac{11a - 5b}{3a(a-b)}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б) } \frac{5}{3a+b} + \frac{2}{a-b} &= \frac{5(a-b)}{(3a+b)(a-b)} + \frac{(3a+b)2}{(3a+b)(a-b)} = \\ &= \frac{5(a-b) + 2(3a+b)}{(3a+b)(a-b)} = \frac{5a - 5b + 6a + 2b}{(3a+b)(a-b)} = \frac{11a - 3b}{(3a+b)(a-b)}. \end{aligned}$$

Замечание. Как правило, в ответе знаменатель оставляют разложенным на множители, а числитель представляют многочленом в стандартном виде.

Пример 2. Найти разность $\frac{5}{a^2c^2 - a^2p^2} - \frac{4}{a^3c + a^3p}$.

Решение. *Способ 1.* Разложим знаменатели дробей на множители:

$$\begin{aligned} a^2c^2 - a^2p^2 &= a^2(c^2 - p^2) = a^2(c - p)(c + p); \\ a^3c + a^3p &= a^3(c + p). \end{aligned}$$

Общий знаменатель: $a^3(c - p)(c + p)$.

Дополнительные множители: a и $c - p$.

$$\frac{\cancel{a}^1 5}{a^2c^2 - a^2p^2} - \frac{\cancel{c-p}^1 4}{a^3c + a^3p} = \frac{5a - 4(c - p)}{a^3(c - p)(c + p)} = \frac{5a - 4c + 4p}{a^3(c - p)(c + p)}.$$



Способ 2 — «цепочкой».

$$\frac{5}{a^2c^2 - a^2p^2} - \frac{4}{a^3c + a^3p} =$$

↓ разложим знаменатели дробей на множители ↓

$$= \frac{5}{a^2(c^2 - p^2)} - \frac{4}{a^3(c + p)} =$$

↓ подпишем дополнительные множители ↓

$$= \frac{\cancel{a}^a 5}{a^2(c - p)(c + p)} - \frac{\cancel{c - p}^{c - p} 4}{a^3(c + p)} =$$

↓ приведем дроби к общему знаменателю ↓

$$= \frac{5a}{a^3(c - p)(c + p)} - \frac{4(c - p)}{a^3(c - p)(c + p)} =$$

↓ используем правило вычитания дробей с одинаковыми знаменателями ↓

$$= \frac{5a - 4(c - p)}{a^3(c - p)(c + p)} =$$

↓ раскроем скобки в числителе ↓

$$= \frac{5a - 4c + 4p}{a^3(c - p)(c + p)}.$$

Пример 3. Сложить дроби

$$\frac{3}{5a^2b - 2ab^2} \text{ и } \frac{4}{25a^2 - 20ab + 4b^2}.$$

Решение. *Способ 1.* Разложим знаменатели дробей на множители:

$$\begin{aligned} 5a^2b - 2ab^2 &= ab(5a - 2b); \\ 25a^2 - 20ab + 4b^2 &= (5a - 2b)^2. \end{aligned}$$

Общий знаменатель: $ab(5a - 2b)^2$.

Дополнительные множители: $5a - 2b$ и ab .

$$\begin{aligned} & \frac{5a - 2b}{3} \div \frac{5a^2b - 2ab^2}{25a^2 - 20ab + 4b^2} = \\ & = \frac{3(5a - 2b) + 4ab}{ab(5a - 2b)^2} = \frac{15a - 6b + 4ab}{ab(5a - 2b)^2}. \end{aligned}$$



Способ 2 — «цепочкой».

$$\begin{aligned} & \frac{3}{5a^2b - 2ab^2} + \frac{4}{25a^2 - 20ab + 4b^2} = \\ & = \frac{5a - 2b}{ab(5a - 2b)} + \frac{ab}{(5a - 2b)^2} = \frac{3(5a - 2b)}{ab(5a - 2b)^2} + \frac{4ab}{ab(5a - 2b)^2} = \\ & = \frac{3(5a - 2b) + 4ab}{ab(5a - 2b)^2} = \frac{15a - 6b + 4ab}{ab(5a - 2b)^2}. \end{aligned}$$



1. Как выполняют сложение (вычитание) рациональных дробей, знаменатели которых — различные многочлены?
2. В каком виде обычно записывают результат сложения (вычитания) дробей?
3. Как можно оформить решение примеров на сложение (вычитание) дробей?

Упражнения

Выполните действия (6.43—6.51).

6.43°. (Устно.)

$$1) \frac{3}{a-1} + \frac{2}{1-a};$$

$$2) \frac{x-2}{x-1} + \frac{x+1}{1-x};$$

$$3) \frac{n}{4k-p} + \frac{d}{p-4k};$$

$$4) \frac{7x^2}{c-2} - \frac{5x^2}{2-c};$$

$$5) \frac{3y}{x-y} - \frac{y}{y-x};$$

$$6) \frac{m+2n}{m-n} - \frac{m+n}{n-m};$$

$$7) \frac{2c+3}{c-k} - \frac{c}{k-c};$$

$$8) \frac{d-8}{3-2d} + \frac{d-4}{2d-3}.$$

6.44°. 1) $\frac{2a+3x}{2a-3x} - \frac{a-5x}{3x-2a}$; 2) $\frac{4a+x}{4a-x} + \frac{2-3x}{x-4a}$;
3) $\frac{a+2c}{2a-3c} - \frac{3a-c}{3c-2a}$; 4) $\frac{3x-2y}{5m-3n} + \frac{x-2y}{3n-5m}$;
5) $\frac{x}{a^2-1} - \frac{y}{1-a^2}$; 6) $\frac{x+y}{a^2-b^2} - \frac{x-y}{b^2-a^2}$;
7) $\frac{3}{a-b} + \frac{4}{b-a} - \frac{1}{a-b}$; 8) $\frac{3a}{x-y} - \frac{8b}{x-y} - \frac{5a}{y-x}$.

6.45°. 1) $\frac{ak}{a-3} + \frac{3k}{3-a}$; 2) $\frac{m-2n}{3m-2n} - \frac{4m-2n}{2n-3m}$;
3) $\frac{9a+2b}{5b-a} - \frac{8a+3b}{a-5b}$; 4) $\frac{4b-5a}{6a-5b} - \frac{10a-8b}{5b-6a}$;
5) $\frac{2c}{9c^2-4d^2} - \frac{d}{4d^2-9c^2}$;
6) $\frac{7n}{16m^2-49n^2} + \frac{4m}{49n^2-16m^2}$;
7) $\frac{16x^2}{4x-3y} + \frac{24xy}{3y-4x} + \frac{9y^2}{4x-3y}$;
8) $\frac{9}{5a-3} + \frac{30a}{3-5a} - \frac{25a^2}{3-5a}$.

6.46°. 1) $\frac{a}{a+b} - \frac{b}{a-b}$; 2) $\frac{x}{a-x} - \frac{a}{a+x}$;
3) $\frac{5}{x+2} - \frac{4}{2-x}$; 4) $\frac{3}{m-n} + \frac{6}{m+n}$;
5) $\frac{2}{x-y} - \frac{3}{x+y}$; 6) $\frac{7a}{a-1} - \frac{2a}{a+1}$;
7) $\frac{b+3}{b-3} + \frac{b-3}{b+3}$; 8) $\frac{d-1}{d-3} + \frac{d+1}{3+d}$;
9) $\frac{8-6b}{7-2b} - \frac{6b+1}{2b+7}$; 10) $\frac{a+6}{5a-6} - \frac{a-2}{5a+6}$.

6.47°. 1) $\frac{-b}{5(a+b)} + \frac{-b}{a+b}$; 2) $\frac{-a}{a-b} - \frac{-a}{4(a-b)}$;
3) $\frac{1}{5(y-4)} + \frac{1}{2(y+4)}$; 4) $\frac{3}{2(x+y)} - \frac{8}{3(x-y)}$;

$$5) \frac{2m}{4(m+n)} - \frac{5m}{m+n};$$

$$6) \frac{8n}{3(n-5)} + \frac{7n}{2(n-5)};$$

$$7) \frac{3x^2}{6(x-y)} + \frac{4y^2}{9(x-y)};$$

$$8) \frac{3y}{2(a-4)} - \frac{5y}{7(a-4)};$$

$$9) \frac{4}{3x+3} - \frac{7}{6x+6};$$

$$10) \frac{8}{2b+4} + \frac{4}{5b+10}.$$

$$6.48^\circ. 1) \frac{3m}{5m-10} + \frac{2m}{m-2};$$

$$2) \frac{a^2}{2a-3} - \frac{a^2}{12a-18};$$

$$3) \frac{3a}{4a-4b} - \frac{4b}{5a-5b};$$

$$4) \frac{3a}{bm-bn} - \frac{2b}{am-an};$$

$$5) \frac{3m}{cx+c^2} + \frac{4}{xc+x^2};$$

$$6) \frac{a-x}{d^2-dx} + \frac{a-d}{dx-x^2};$$

$$7) \frac{4-p^2}{p^2-49} + \frac{p}{7+p};$$

$$8) \frac{x}{4-c^2} + \frac{3}{2+c};$$

$$9) \frac{4x}{5-x} - \frac{3x-4}{25-x^2};$$

$$10) \frac{3}{121-x^2} - \frac{5}{x+11}.$$

$$6.49. 1) t - \frac{25}{t-5} - 5;$$

$$2) k - \frac{9}{k-3} - 3;$$

$$3) \frac{1-5b}{7b^2-7} - \frac{1-b}{4b+4} - \frac{1+b}{3b-3};$$

$$4) \frac{3x}{8x^2-32} - \frac{x+2}{4x-8} + \frac{x-2}{3x+6};$$

$$5) \frac{4m-1}{2m^2+6m} + \frac{7-2m}{m^2-9} + \frac{5}{m};$$

$$6) \frac{c-d}{c} + \frac{d}{c+d} + \frac{d^2}{c^2+cd};$$

$$7) \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2} - \frac{b}{a+b} + \frac{b}{b-a};$$

$$8) \frac{a+7}{a^2+4a} - \frac{a+1}{3a+12} - \frac{3-2a}{3a};$$

$$9) \frac{2m}{2m+n} - \frac{4m^2}{4m^2+4mn+n^2};$$

$$10) \frac{m-1}{3m^2+6m+3} - \frac{1}{2m+2}.$$

6.50. 1) $\frac{16-7n}{(n-4)^2} - \frac{n-n^2}{(4-n)^2}$; 2) $\frac{14n-n^2}{(6-n)^2} - \frac{2n+36}{(n-6)^2}$;
 3) $\frac{9n^2+4n}{(3n-1)^2} - \frac{10n-1}{(1-3n)^2}$; 4) $\frac{20n}{(2-5n)^2} - \frac{4+25n^2}{(5n-2)^2}$;
 5) $\frac{m^3-8m^2}{(1-m)^3} - \frac{6m+4m^2-1}{(m-1)^3} - \frac{1-2m-m^3}{(m-1)^3}$;
 6) $\frac{4m^3-2}{(3-m)^3} - \frac{5m-4m^2-2}{(m-3)^3} + \frac{4m^3+7m}{(m-3)^3}$;
 7) $\frac{2t+3}{t^2-4t+4} - \frac{5}{t^2-4} - \frac{2t-3}{t^2+4+4t}$;
 8) $\frac{2k+1}{k^2+9-6k} - \frac{8}{k^2-9} - \frac{2k-1}{k^2+9+6k}$.

6.51. 1) $\frac{3}{y-9} - \frac{4y-3}{81-y^2}$; 2) $\frac{12m-7}{m^2-4} - \frac{3}{2-m}$;
 3) $\frac{x^2+8}{5x-3} - \frac{40x+5x^3}{25x^2-9}$; 4) $\frac{1+21a^2}{9a^2-1} - \frac{a}{1-3a}$;
 5) $\frac{2m}{25m^2-1} + \frac{3m-1}{1-5m} - \frac{3m+1}{3-15m}$;
 6) $\frac{8}{a} - \frac{2}{a-3b} - \frac{a+6b}{9b^2-a^2}$;
 7) $\frac{4}{(x-y)^2} - \frac{3}{x-y}$;
 8) $\frac{8}{(a+b)^2} - \frac{3}{a+b}$;
 9) $\frac{7x-2}{x^2-2x+1} + \frac{3}{x-1}$;
 10) $\frac{4}{1-5x} - \frac{3x-2}{25x^2-10x+1}$.

6.52. Найдите значение выражения:

1) $\frac{1}{6m-4n} - \frac{1}{6m+4n} - \frac{3m}{4n^2-9m^2}$ при $m=-3$;
 $n=-2$;

$$2) \frac{5}{5m-n} + \frac{2}{5m+n} + \frac{30m+2n}{n^2-25m^2} \text{ при } m=-2; n=-4;$$

$$3) \frac{4m}{m^2-25} - \frac{3}{m+5} + \frac{2}{5-m} \text{ при } m=-6,25;$$

$$4) \frac{1}{m-3} - \frac{2}{3+m} - \frac{4m+18}{9-m^2} \text{ при } m=4,5.$$

6.53. Докажите тождество:

$$1) \frac{1}{(m-n)(n-k)} - \frac{1}{(n-k)(m-k)} - \frac{1}{(k-m)(n-m)} = 0;$$

$$2) \frac{2}{(n-k)(k-m)} + \frac{2}{(m-n)(k-m)} + \frac{2}{(m-n)(n-k)} = 0;$$

$$3) \frac{1}{m(m-1)} + \frac{1}{m(m+1)} + \frac{1}{(m+1)(m-1)} = \frac{3}{m^2-1};$$

$$4) \frac{1}{n(2n-3)} + \frac{1}{n(2n+3)} - \frac{1}{(2n+3)(2n-3)} = \frac{3}{4n^2-9}.$$

6.54*. Выполните действия:

$$1) \frac{x^2}{x^3-y^3} + \frac{4y}{x^2+xy+y^2} + \frac{y^2}{y^3-x^3};$$

$$2) \frac{a^2}{a^3-b^3} + \frac{5a}{a^2+ab+b^2} + \frac{b^2}{b^3-a^3}.$$

6.7. Умножение дробей



Напомним, что обыкновенные дроби умножают по правилу

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

Отсюда следует, что для любых рациональных дробей $\frac{A}{B}$ и $\frac{C}{D}$ имеет место тождество

$$\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{A \cdot C}{B \cdot D}.$$

Это тождество выражает **правило умножения рациональных дробей** и читается так:



произведение двух рациональных дробей является дробью, числитель которой равен произведению их числителей, а знаменатель — произведению их знаменателей.

Напомним, что дробь, которую получают в результате действий, принято сокращать, если это возможно.

Пример 1. Выполнить умножение дробей:

$$а) \frac{-9x^{10}y^2}{4y^7} \left(-\frac{8x^5}{27} \right); \quad б) \frac{3a+6c}{7bc} \cdot \frac{14b}{a+2c};$$

$$в) \frac{x^2-y^2}{5x^3+5x^2y} \cdot \frac{x^2+y^2}{x^4-y^4}.$$

Решение.

$$а) \frac{-9x^{10}y^2}{4y^7} \left(-\frac{8x^5}{27} \right) = \frac{-9x^{10}y^2(-8x^5)}{4y^7 \cdot 27} =$$

$$= \frac{(-1)x^{10}(-2)x^5}{y^5 \cdot 3} = \frac{2x^{15}}{3y^5};$$

$$б) \frac{3a+6c}{7bc} \cdot \frac{14b}{a+2c} = \frac{3(a+2c)14b}{7bc(a+2c)} = \frac{6}{c};$$

$$в) \frac{x^2-y^2}{5x^3+5x^2y} \cdot \frac{x^2+y^2}{x^4-y^4} = \frac{(x^2-y^2)(x^2+y^2)}{5x^2(x+y)(x^4-y^4)} =$$

$$= \frac{x^4-y^4}{5x^2(x+y)(x^4-y^4)} = \frac{1}{5x^2(x+y)}.$$

▲ **Пример 2.** Найти значение выражения

$$\frac{k^2-2kp+p^2}{k^2-kp+p^2} \cdot \frac{k^3+p^3}{6k-6p} \text{ при } k=-3,4, p=-4,6.$$

Решение.

$$\frac{k^2-2kp+p^2}{k^2-kp+p^2} \cdot \frac{k^3+p^3}{6k-6p} = \frac{(k-p)^2(k+p)(k^2-kp+p^2)}{(k^2-kp+p^2)6(k-p)} = \frac{k^2-p^2}{6}.$$

При $k = -3,4$ и $p = -4,6$ получим:

$$\begin{aligned}\frac{k^2 - p^2}{6} &= \frac{(-3,4)^2 - (-4,6)^2}{6} = \frac{(-3,4 + 4,6)(-3,4 - 4,6)}{6} = \\ &= \frac{1,2(-8)}{6} = -1,6.\end{aligned}$$



Обозначив исходное выражение буквой F , решение можно оформить так:

$$\begin{aligned}F &= \frac{k^2 - 2kp + p^2}{k^2 - kp + p^2} \cdot \frac{k^3 + p^3}{6k - 6p} = \frac{(k - p)^2 (k + p)(k^2 - kp + p^2)}{(k^2 - kp + p^2)6(k - p)} = \\ &= \frac{(k - p)(k + p)}{6}; \\ F \Big|_{\substack{k = -3,4 \\ p = -4,6}} &= \frac{(-3,4 + 4,6)(-3,4 - 4,6)}{6} = \frac{1,2(-8)}{6} = -1,6.\end{aligned}$$

Ответ: $F = -1,6$. ▲



1. Запишите тождество, выражающее правило умножения обыкновенных дробей. Вспомните, как формулируется это правило.
2. Запишите тождество, выражающее правило умножения рациональных дробей. Сформулируйте это правило.

Упражнения

Найдите произведение (6.55—6.61).

6.55°. (Устно).

1) $\frac{14}{19} \cdot \frac{c}{28};$

2) $\frac{17}{21} \cdot \frac{7}{x};$

3) $\frac{39}{25} \cdot \frac{5x}{13y};$

4) $\frac{4}{x} \cdot \frac{x}{4};$

5) $\frac{16}{c} \cdot \frac{c}{32};$

6) $\left(-\frac{8}{k}\right) \frac{1}{16};$

7) $-\frac{a}{2} \left(-\frac{12b}{a} \right);$

8) $-\frac{c}{6b} \left(-\frac{18}{c} \right);$

9) $-\frac{64a}{49} \cdot \frac{21b}{16a};$

10) $\frac{81m}{25} \left(\frac{-75k}{54m} \right).$

6.56°. 1) $-\frac{6x}{11b} \cdot \frac{b^2}{36x};$

2) $\frac{4m^2}{n} \cdot \frac{n^2}{8m};$

3) $\frac{14a^2}{2y} \cdot \frac{4y^2}{7a};$

4) $\frac{24x}{5k} \cdot \frac{k}{3x};$

5) $\frac{2p}{-a} \cdot \frac{p}{8a};$

6) $\frac{21b}{cd} \left(\frac{b}{-7cd} \right).$

6.57°. 1) $\frac{d^3}{8} \left(-\frac{4m}{9d} \right);$

2) $\left(-\frac{14x^3}{9y} \right) \frac{81y^3}{21x^2};$

3) $\left(-\frac{y}{km} \right) \left(-\frac{ky}{nm} \right);$

4) $\left(-\frac{bm}{ad} \right) \left(-\frac{am}{bd} \right);$

5) $\frac{8a^3y}{13c} \cdot \frac{26c^3}{7ay};$

6) $\frac{7x^4}{8c^4y} \cdot \frac{40c^4}{35c^3y^3x};$

7) $\left(\frac{5a}{x} \right)^2 \frac{x^2}{25a^2};$

8) $\frac{9z^2}{16y^2} \left(\frac{4y}{3z} \right)^2;$

9) $\frac{4c^2m}{3y^2} \cdot \frac{5m^2y}{16c^2} \cdot \frac{24y^3}{40m^2};$

10) $\frac{3a^3b^2}{16c^2x^6} \cdot \frac{8c^3x^5}{7c^3} \cdot \frac{21a^3b^3}{14a^4b^5}.$

6.58°. 1) $-7b \cdot \frac{a}{14b};$

2) $-3m \cdot \frac{n}{12m};$

3) $\frac{4x}{3d} \cdot 15xd;$

4) $21z^5 \cdot \frac{4a}{7z^4};$

5) $-16ab \left(-\frac{3b}{4a} \right);$

6) $-38mn \left(-\frac{5n}{14m} \right).$

6.59. 1) $2m^2y^3 \left(-\frac{3bn}{4y^4m^2} \right);$

2) $\frac{4a^2}{9b^4c^2x} \cdot 3b^3c^3;$

3) $4m^4x^5 \left(-\frac{3a^2n^5}{8x^5m^3} \right);$

4) $\frac{5a^2b}{3cd^3} (-9c^2d^5);$

5) $\left(-\frac{7y^8z}{9y^7t^3} \right) 27y^8t^5z^2;$

6) $2a^5b^6d \left(-\frac{5c^2d}{a^4b^4} \right);$

$$7) \frac{5a^2b}{3cd} \cdot \frac{4b^2c}{15a^2} \cdot \frac{9c^2d}{16b^4};$$

$$8) \frac{21c^3x^5}{16a^4b^5} \cdot \frac{8a^3b^3}{14c^2x^6} \cdot \frac{3a^2n^2}{7c^3}.$$

$$6.60. \quad 1) \frac{a-c}{3d} \cdot \frac{6b}{a-c};$$

$$2) \frac{8-y}{m+n} \cdot \frac{m-n}{8-y};$$

$$3) \frac{x^2-xy}{d} \cdot \frac{d^2}{x};$$

$$4) \frac{xy^2+y^3}{27} \cdot \frac{9a}{y^2};$$

$$5) \frac{x^2-y^2}{x^3+y^2x} \cdot \frac{5x}{y-x};$$

$$6) \frac{x^2-y^2}{8xy} \cdot \frac{24x^2y}{x+y};$$

$$7) \frac{x^2+y^2}{4x^3+4x^2y} \cdot \frac{x^2-y^2}{x^4-y^4};$$

$$8) \frac{a^2-b^2}{5a^2b+5a^3} \cdot \frac{25a^3}{b-a}.$$

$$6.61. \quad 1) \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2+2xy} \cdot \frac{4x+4y}{xy-x^2};$$

$$2) \frac{4x^2-4xy+y^2}{4x^2-y^2} \cdot \frac{2xy+y^2}{12x-6y};$$

$$3) \frac{4a^2-4b^2}{3a^2+3b^2+6ab} \cdot \frac{a^2+ab}{2b-2a};$$

$$4) \frac{6a^2+6b^2-12ab}{25b^2-25a^2} \cdot \frac{5a+5b}{b^2-ab};$$

$$5) \frac{a^2-ab}{b^2+ab} \cdot \frac{a^2b+ab^2}{b^3-a^2b};$$

$$6) \frac{p^2-2pt}{p^2+3pt} \cdot \frac{p^2t+3pt^2}{p^3-2p^2t};$$

$$7) \frac{a^2-16}{a^3-3a^2} \cdot \frac{a^2-9}{a^2+4a};$$

$$8) \frac{p^2-25}{p^3-6p^2} \cdot \frac{p^2-36}{p^2+5p};$$

$$9)^* \frac{5a^2-20a+20}{3a^2+3a+3} \cdot \frac{a^3-1}{10a^2-40};$$

$$10)^* \frac{4p^2-24p+36}{7p^2-7p+7} \cdot \frac{p^3+1}{5p^2-45}.$$

6.62. Найдите значение выражения:

$$1) \frac{a^2-25}{a^2-3a} \cdot \frac{a^2-9}{a+5} \text{ при } a=-3;$$

$$2) \frac{16-a^2}{3a^2-21a} \cdot \frac{a^2-49}{4-a} \text{ при } a=8;$$

- 3) $\frac{m^2 + 2mn}{4m^2 - 4n^2} \cdot \frac{2n - 2m}{m + 2n}$ при $m = -3\frac{1}{4}$, $n = -6\frac{3}{4}$;
- 4) $\frac{3n^2 - 3p^2}{n^2 + np} \cdot \frac{n + p}{6p - 6n}$ при $n = -7\frac{1}{9}$, $p = 3\frac{1}{9}$;
- 5) $\frac{7xy - 7y^2}{x^2 + xy} \cdot \frac{x^3 - xy^2}{14y^3}$ при $x = 5\frac{3}{4}$, $y = 3\frac{1}{4}$;
- 6) $\frac{m^2 - mn}{8mn + 8m^2} \cdot \frac{16n^2}{m^3 - mn^2}$ при $m = -8,2$, $n = -1,8$;
- 7) $\frac{a^2 + 4ab + 4b^2}{a^2 - 4ab + 4b^2} \cdot \frac{(a - 2b)^3}{3a + 6b}$ при $a = -4$, $b = -\frac{1}{2}$;
- 8) $\frac{m^2 - 2mn + n^2}{m^2 + 2mn + n^2} \cdot \frac{(m + n)^3}{6m - 6n}$ при $m = -9\frac{5}{17}$, $n = -3\frac{5}{17}$.

6.63. Решите уравнение:

- 1) $\frac{3x - 9}{8} \cdot \frac{6x}{27} = 0$; 2) $\frac{10x - 25}{3} \cdot \frac{9x}{5} = 0$;
- 3) $\frac{25x^2 - 16}{9} \cdot \frac{18}{3x} = 0$; 4) $\frac{4x^2 - 49}{25} \cdot \frac{125}{2x} = 0$;
- 5) $\frac{x^2 - 4}{6} \cdot \frac{18}{2x - 4} = 0$; 6) $\frac{x^2 - 25}{24} \cdot \frac{4}{3x + 15} = 0$.

6.64. Представьте выражение в виде дроби:

- 1) $\left(\frac{m^6}{n^3}\right)^2$; 2) $\left(\frac{a^7}{b^2}\right)^3$;
- 3) $\left(-\frac{3a^3}{2b^2}\right)^4$; 4) $\left(-\frac{4m^4}{5n}\right)^3$;
- 5) $\left(-\frac{9x^5y^{10}}{4z^4}\right)^2 \left(-\frac{2z^3}{3x^3y^2}\right)^3$;
- 6) $\left(-\frac{3a^5b^4}{8m^5}\right)^2 \left(-\frac{2m^4}{3a^3b^2}\right)^3$;
- 7) $\left(-\frac{5p^4t^5}{16m^2n}\right)^2 \left(\frac{4m^4n}{15p^2t^3}\right)^3$;
- 8) $\left(-\frac{8mn^3}{7k^2}\right)^5 \left(-\frac{49k^6}{64m^3n^2}\right)^2$.

6.65*. Найдите произведение:

- 1) $\frac{3m^2 + 3mn + 3n^2}{4m + 4n} \cdot \frac{2m^2 - 2n^2}{9m^3 - 9n^3};$
- 2) $\frac{5m^2 - 10mn + 5n^2}{2m^2 - 2mn + 2n^2} \cdot \frac{10m^3 + 10n^3}{8m - 8n};$
- 3) $\frac{m^2 - 4}{m^2 + 6m + 9} \cdot \frac{m^2 + 3m}{m^2 - 4m + 4};$
- 4) $\frac{m^2 + 8m + 64}{m^3 - 512} \cdot \frac{m^2 - 16m + 64}{m - 8}.$

6.8. Деление дробей



Напомним, что обыкновенные дроби $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ ($c \neq 0$) делят по правилу

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}.$$

Отсюда следует, что для любых рациональных дробей $\frac{A}{B}$ и $\frac{C}{D}$, где C — ненулевой многочлен, имеет место тождество

$$\frac{A}{B} : \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \cdot \frac{D}{C}.$$

Это тождество выражает **правило деления рациональных дробей** и читается так:



чтобы разделить дробь на дробь, нужно делимое умножить на дробь, обратную делителю.

Пример 1. Выполнить деление рациональных дробей

$$\frac{16m^5 p^{14}}{9a^2 b^4} : \frac{64m^3 p^5}{27a^3 b^5}.$$

Решение.

$$\frac{16m^5 p^{14}}{9a^2 b^4} : \frac{64m^3 p^5}{27a^3 b^5} =$$

↓ воспользуемся правилом деления
рациональных дробей ↓

$$= \frac{16m^5 p^{14} \cdot 27a^3 b^5}{9a^2 b^4 \cdot 64m^3 p^5} =$$

↓ выполним сокращение полученной дроби ↓

$$= \frac{3abm^2 p^9}{4}.$$

Пример 2. Выполнить деление выражений:

а) $\frac{9(m-n)^2}{11ax^3} : (18ax^3(m-n));$

б) $18ax^3(m-n) : \frac{9(m-n)^2}{11ax^3}.$

Решение.

а) $\frac{9(m-n)^2}{11ax^3} : (18ax^3(m-n)) =$
 $= \frac{9(m-n)^2}{11ax^3} \cdot \frac{1}{18ax^3(m-n)} =$
 $= \frac{9(m-n)^2}{11ax^3 \cdot 18ax^3(m-n)} = \frac{m-n}{22a^2x^6};$

б) $18ax^3(m-n) : \frac{9(m-n)^2}{11ax^3} = \frac{18ax^3(m-n)}{1} \cdot \frac{11ax^3}{9(m-n)^2} =$
 $= \frac{18ax^3(m-n)11ax^3}{9(m-n)^2} = \frac{22a^2x^6}{m-n}.$

Пример 3. Найти частное рациональных дробей

$$\frac{2a^2 + 3b^2}{6a^2 + 18ab} : \frac{4a^4 - 9b^4}{9a^2 + 81b^2 + 54ab}.$$

Решение.

$$\frac{2a^2 + 3b^2}{6a^2 + 18ab} : \frac{4a^4 - 9b^4}{9a^2 + 81b^2 + 54ab} =$$

↓ воспользуемся правилом деления
рациональных дробей ↓

$$= \frac{(2a^2 + 3b^2)(9a^2 + 81b^2 + 54ab)}{(6a^2 + 18ab)(4a^4 - 9b^4)} =$$

↓ разложим на множители многочлены,
входящие в числитель и знаменатель ↓

$$= \frac{(2a^2 + 3b^2)9(a + 3b)^2}{6a(a + 3b)(2a^2 + 3b^2)(2a^2 - 3b^2)} =$$

↓ сократим дробь на выражение $3(2a^2 + 3b^2)(a + 3b)$ ↓

$$= \frac{3(a + 3b)}{2a(2a^2 - 3b^2)}.$$

Пример 4. Упростить выражение

$$A = \left(\frac{1}{t+2} - \frac{4}{4t-t^3} \right) : \left(\frac{t-2}{t^2+2t} - \frac{t}{2t+4} \right).$$

Решение. *Способ 1* — «по действиям». Укажем (цифрами в кружочках) порядок действий в выражении A и затем выполним каждое из этих действий в отдельности:

$$A = \left(\overset{\textcircled{1}}{\frac{1}{t+2}} - \overset{\textcircled{1}}{\frac{4}{4t-t^3}} \right) : \left(\overset{\textcircled{3}}{\frac{t-2}{t^2+2t}} - \overset{\textcircled{2}}{\frac{t}{2t+4}} \right);$$

$$\begin{aligned} 1) \quad \frac{1}{t+2} - \frac{4}{4t-t^3} &= \frac{\cancel{t(2-t)}^1}{t+2} - \frac{\cancel{t(2-t)}^1}{t(2-t)(2+t)} = \\ &= \frac{2t-t^2-4}{t(2-t)(2+t)} = \frac{-(t^2-2t+4)}{t(2-t)(2+t)}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad \frac{t-2}{t^2+2t} - \frac{t}{2t+4} &= \frac{\cancel{t}^2}{t(t+2)} - \frac{\cancel{t}}{2(t+2)} = \\ &= \frac{2t-4-t^2}{2t(t+2)} = \frac{-(t^2-2t+4)}{2t(t+2)}; \end{aligned}$$

$$3) \frac{-(t^2 - 2t + 4)}{t(2-t)(2+t)} : \frac{-(t^2 - 2t + 4)}{2t(t+2)} = \frac{2t(t+2)}{t(2-t)(2+t)} = \frac{2}{2-t}.$$

Ответ: $A = \frac{2}{2-t}.$



Способ 2 — «цепочкой».

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{1}{t+2} - \frac{4}{4t-t^3} \right) : \left(\frac{t-2}{t^2+2t} - \frac{t}{2t+4} \right) = \\ &= \left(\frac{\cancel{t(2-t)}1}{t+2} - \frac{\cancel{1}4}{t(t+2)(2-t)} \right) : \left(\frac{\cancel{2}t-2}{t(t+2)} - \frac{\cancel{t}}{2(t+2)} \right) = \\ &= \frac{t(2-t)-4}{t(t+2)(2-t)} : \frac{2(t-2)-t^2}{2t(t+2)} = \\ &= \frac{(2t-t^2-4)2t(t+2)}{t(t+2)(2-t)(2t-4-t^2)} = \frac{2}{2-t}. \end{aligned}$$



1. Запишите тождество, выражающее правило деления обыкновенных дробей. Вспомните, как формулируется это правило.
2. Запишите тождество, выражающее правило деления рациональных дробей. Сформулируйте это правило.

Упражнения

Выполните деление (6.66—6.74).

6.66°. (Устно.)

1) $\frac{2}{9} : \frac{a}{3};$

2) $\frac{2b}{5} : \frac{11}{12};$

3) $\frac{6}{5} : \frac{9c}{8};$

4) $\frac{a}{7} : \frac{13}{14};$

5) $\frac{4}{6} : \frac{13a}{16b};$

6) $\frac{11}{12c} : \frac{x}{2c};$

7) $\frac{15}{16n} : \frac{4}{yn};$

8) $\frac{17}{a} : \frac{2b}{ma}.$

6.67°. 1) $\frac{1}{a} : b;$

2) $\frac{b}{4} : c;$

3) $a : \frac{1}{b};$

4) $d : \frac{x}{2};$

5) $-12ab^2 : \frac{b}{a};$

6) $-\frac{8b}{c} : (-4b^2c).$

$$6.68^\circ. \quad 1) \frac{18m^3n^2}{7kp} : 9mn^2; \quad 2) \frac{30c^3x^5}{11d^2} : 15c^2x^5;$$

$$3) 10a^2b^3 : \frac{20a^3b^4}{7k^2}; \quad 4) 24k^2 : \frac{12x^4k^2}{11p^3y}.$$

$$6.69. \quad 1) \frac{4x^3}{3y} : (24xy)^2; \quad 2) \frac{3a^5}{8b} : (15ab)^3;$$

$$3) (28y^4x)^4 : \frac{56x}{14y^4}; \quad 4) (64a^5b)^2 : \frac{16a^4}{5b^3}.$$

$$6.70^\circ. \quad 1) \frac{8b}{9c} : \frac{16b}{81c^2}; \quad 2) \frac{6a^2}{7x} : \frac{36a}{49x^2}; \quad 3) \frac{b^2}{25} : \frac{b}{75y}.$$

$$6.71. \quad 1) \frac{a^2y^4}{4m} : \left(-\frac{ay^5}{8m^2}\right); \quad 2) \frac{16x^3a^4}{21b^4} : \left(-\frac{8x^2a^3}{27b^5}\right);$$

$$3) \left(-\frac{18x^2y^2}{5cd}\right) : \left(-\frac{6xy^3}{5c^2d^4}\right);$$

$$4) \left(-\frac{24a^4b^5}{121x^7y^9}\right) : \left(\frac{6a^3b^4}{55x^9y^{11}}\right).$$

$$6.72. \quad 1) \frac{m^2 - n^2}{4m^2n^2} : \frac{m + n}{2mn}; \quad 2) \frac{m^2 + mn}{m} : \frac{mn + n^2}{n};$$

$$3) \frac{x + y}{x - y} : \frac{x^2 + xy}{4x^2 - 4y^2}; \quad 4) \frac{4x^2 - 4y^2}{x^2 + xp} : \frac{8x - 8y}{x + p}.$$

$$6.73. \quad 1) \frac{a + b}{a - b} : \frac{a}{a - b}; \quad 2) \frac{(x - y)^3}{x^2} : \frac{(x - y)^2}{x^4};$$

$$3) \frac{3a^4 - 3b^4}{4a + 4b} : \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}; \quad 4) \frac{a^2 + b^2}{6 - 6a} : \frac{a^4 - b^4}{a^2 - 2a + 1}.$$

$$6.74. \quad 1) \frac{ab^2 - ac^2}{b^2 + 2bc + c^2} : \frac{ab^2 - 2abc + ac^2}{5b + 5c};$$

$$2) \frac{ax + ay}{x^2 + 2xy + y^2} : \frac{ax^2 + 2axy + ay^2}{2x + 2y}.$$

6.75*. Представьте дробь в виде суммы единицы и рациональной дроби по образцу

$$\frac{p^3 + 5p^2 - 9}{p^3 - 7} = \frac{(p^3 - 7) + 7 + 5p^2 - 9}{p^3 - 7} = 1 + \frac{5p^2 - 2}{p^3 - 7}.$$

$$\begin{array}{ll} 1) \frac{a+2b}{a+b}; & 2) \frac{a^2+a+1}{a+1}; \\ 3) \frac{x^2+2+x}{1+x^2}; & 4) \frac{4+x+x^2}{2+x^2}. \end{array}$$

6.76. Найдите значение выражения:

$$\begin{array}{l} 1) \frac{25m^2-9n^2}{4m^2-16m} : \frac{25m^2+30mn+9n^2}{12m-48} \text{ при } m=-3, n=3; \\ 2) \frac{49b^2-16a^2}{7b^2-14b} : \frac{49b^2-56ab+16a^2}{28b-56} \text{ при } a=2, b=-2. \end{array}$$

6.77. Решите уравнение:

$$1) \frac{(x-4)^2}{x+5} : \frac{x^2-16}{3x+15} = 0; \quad 2) \frac{(x+7)^2}{x-1} : \frac{x^2-49}{8x-8} = 0.$$

6.78°. При каком значении a дробь обращается в нуль:

$$\begin{array}{ll} 1) \frac{3a-15}{a-7}; & 2) \frac{2a-8}{a-2}; \\ 3) \frac{5a-20}{a-6}; & 4) \frac{7a-14}{a-15}? \end{array}$$

6.79. При каком значении n дробь не имеет смысла:

$$1) \frac{2n-14}{n-5}; \quad 2) \frac{n-12}{n-7}; \quad 3) \frac{7n-21}{4n^2-25}?$$

Выполните действия (**6.80—6.83**).

$$\begin{array}{l} \mathbf{6.80^*}. 1) \left(\frac{5}{x+y} - \frac{6}{x-y} \right) \frac{x-y}{11y+x}; \\ 2) \left(\frac{a-3}{a+3} - \frac{a+3}{a-3} \right) \frac{9-a^2}{24a^2}; \\ 3) \left(\frac{8m}{m-2} + 2m \right) : \frac{3m+6}{6m-12}; \\ 4) \left(7m - \frac{4m}{m-3} \right) : \frac{21m-75}{6m-18}. \end{array}$$

$$6.81*. 1) \left(\frac{3a}{a+5} - \frac{8a}{a^2+10a+25} \right) : \frac{3a+7}{a^2-25} - \frac{5a-25}{a+5};$$

$$2) \left(\frac{9a}{a-8} + \frac{7a}{a^2+64-16a} \right) : \frac{9a-65}{a^2-64} - \frac{8a+64}{a-8}.$$

$$6.82*. 1) \frac{a^2+ab}{2b} : (a^2-b^2) \left(\frac{(a+b)^2}{4ab} - 1 \right);$$

$$2) \frac{m^2-mn}{2n} : (m^2-n^2) \left(\frac{(m-n)^2}{4mn} + 1 \right).$$

$$6.83*. 1) \left(\frac{x^2}{4a^2} - 1 + \frac{a^2}{x^2} \right) : \left(\frac{x}{2a} - \frac{a}{x} \right);$$

$$2) \left(\frac{m^2}{n^2} + 1 + \frac{n^2}{4m^2} \right) : \left(\frac{2m^3}{n} - \frac{n^3}{2m} \right).$$

6.84. Найдите значение выражения:

$$1) \left(\frac{a+b}{a} - \frac{2b}{a+b} \right) : \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2} \text{ при } a=-4,5, b=4,5;$$

$$2) \left(\frac{m-n}{m} + \frac{2n}{m-n} \right) : \frac{m^2+n^2}{m^2-n^2} \text{ при } m=8,4, n=-4,2.$$

6.9. Рациональные выражения

Определение. Рациональным называется выражение, составленное из многочленов, соединенных знаками арифметических действий, и не содержащее деления на нулевой многочлен.

Рациональная дробь также является рациональным выражением.

Примеры рациональных выражений:

$$a + \frac{2b}{a-1}; \quad \frac{2b+1}{3-\frac{a}{b}} + \frac{(a-1)^2 - \frac{1}{3}}{4(a+3) \cdot \frac{b+3}{2ab}};$$

$$(xy)^{-6} + \frac{x}{y}; \quad \left(-2\frac{1}{3} \right)^3;$$

$$(3x^2y^3 + y) - (x^2 - y)y^2 + 2 + (2y - 3x^7)^2;$$

$$\frac{1}{3}a^3 + ab^2 - \frac{1}{7}b; \quad \frac{3m - 4n^2}{11}.$$

Определение. Рациональное выражение, не содержащее деления на многочлен выше нулевой степени, называется *целым*.

Таким образом,



рациональное целое выражение не содержит деления на выражение с переменной.

Среди приведенных выше семи примеров рациональных выражений последние четыре являются примерами целых выражений.

Выражения на рисунке 63 являются целыми, а на рисунке 64 — не являются.

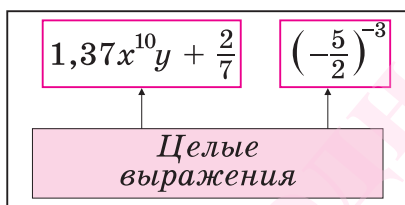


Рис. 63

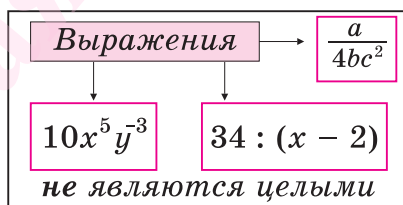


Рис. 64

Из определения следует, что **целое выражение можно представить в виде суммы, разности и произведения нескольких многочленов.**

Многочлен также является целым выражением.



Из любого рационального выражения можно в результате тождественных преобразований получить рациональную дробь. Из любого целого выражения можно в результате тождественных преобразований получить многочлен стандартного вида.

О выражениях, в которых встречается деление на нулевой многочлен, говорят, что они *не имеют смысла*.

Например, не имеет смысла выражение

$$x - \frac{3y}{7xy - 7xy} : \frac{1}{(x - 2y)^3},$$

поскольку $7xy - 7xy$ — нулевой многочлен.

Пример 1. Преобразовать целое выражение A в многочлен стандартного вида и определить его степень:

$$A = 2(3x - 8y^2)(x^2 - y) + 5(x + y)(x^2 - xy + y^2).$$

Решение.

$$\begin{aligned} A &= (6x - 16y^2)(x^2 - y) + (5x + 5y)(x^2 - xy + y^2) = \\ &= \underline{6x^3} - 16x^2y^2 - 6xy + \underline{16y^3} + \underline{5x^3} + \\ &+ \underline{5x^2y} - \underline{5x^2y} - \underline{5xy^2} + \underline{5xy^2} + \underline{5y^3} = \\ &= 11x^3 - 16x^2y^2 - 6xy + 21y^3. \end{aligned}$$

Степень многочлена A равна 4.

Ответ: $A = 11x^3 - 16x^2y^2 - 6xy + 21y^3$; степень 4.

Пример 2. Решить уравнение

$$\frac{13}{4}(x - 1)(x^2 + x + 1) - (3,25x^2 - 1) + 2\frac{1}{4} = 0.$$

Решение.

$$\begin{aligned} &\left(\frac{13}{4}x - \frac{13}{4}\right)(x^2 + x + 1) - \frac{13}{4}x^2 + 1 + \frac{9}{4} = 0; \\ &\quad \downarrow \text{умножим обе части уравнения на 4} \quad \downarrow \\ &\quad \text{и раскроем скобки} \\ &13x^3 + \underline{13x^2} + \underline{13x} - \underline{13x^2} - \underline{13x} - \underline{13} - \underline{13x^2} + \underline{13} = 0; \\ &\quad 13x^3 - 13x^2 = 0; \\ &\quad 13x^2(x - 1) = 0; \\ &\quad 13x^2 = 0 \text{ или } x - 1 = 0; \\ &\quad x = 0 \text{ или } x = 1. \end{aligned}$$

Ответ: 0; 1.

Покажем на примерах, как преобразовывать более сложные рациональные выражения.

Пример 3. Упростить рациональное выражение

$$A = \left(\frac{m-1}{2m+2} - \frac{m+1}{2m-2} \right) : \frac{m}{4-4m^2}.$$

Решение. *Способ 1 — «по действиям».* Укажем (цифрами в кружочках) порядок действий в выражении A и затем выполним каждое из этих действий в отдельности:

$$A = \left(\overset{\textcircled{1}}{\frac{m-1}{2m+2}} - \overset{\textcircled{2}}{\frac{m+1}{2m-2}} \right) : \frac{m}{4-4m^2};$$

$$\begin{aligned} 1) \quad \frac{m-1}{2m+2} - \frac{m+1}{2m-2} &= \frac{m-1}{2(m+1)} - \frac{m+1}{2(m-1)} = \\ &= \frac{(m-1)(m-1) - (m+1)(m+1)}{2(m+1)(m-1)} = \\ &= \frac{m^2 - 2m + 1 - (m^2 + 2m + 1)}{2(m+1)(m-1)} = \\ &= \frac{-4m}{2(m+1)(m-1)} = \frac{-2m}{(m+1)(m-1)}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad \frac{-2m}{(m+1)(m-1)} : \frac{m}{4-4m^2} &= \frac{-2m}{(m+1)(m-1)} \cdot \frac{4-4m^2}{m} = \\ &= \frac{-2m \cdot 4(1-m^2)}{(m^2-1)m} = 8. \end{aligned}$$

Ответ: $A = 8$.



Способ 2 — «цепочкой».

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{m-1}{2m+2} - \frac{m+1}{2m-2} \right) : \frac{m}{4-4m^2} = \\ &= \left(\frac{m-1}{2m+2} - \frac{m+1}{2m-2} \right) \frac{4(1-m^2)}{m} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{((m-1)^2 - (m+1)^2)4(1-m^2)}{2(m+1)(m-1)m} = \\
 &= \frac{(m^2 - 2m + 1 - (m^2 + 2m + 1))2(-1)}{m} = \frac{-4m(-2)}{m} = 8.
 \end{aligned}$$

Пример 4. Упростить рациональное выражение

$$\frac{y}{y+2} + \left(\frac{1}{4-y^2} - \frac{1}{4-4y+y^2} \right) : \frac{2}{(y-2)^2}.$$

Решение.

$$\begin{aligned}
 &\frac{y}{y+2} + \left(\frac{1}{4-y^2} - \frac{1}{4-4y+y^2} \right) : \frac{2}{(y-2)^2}; \\
 1) \quad &\frac{1}{4-y^2} - \frac{1}{4-4y+y^2} = \frac{1}{(2-y)(2+y)} - \frac{1}{(2-y)^2} = \\
 &= \frac{1(2-y) - 1(2+y)}{(2-y)^2(2+y)} = \frac{2-y-2-y}{(2-y)^2(2+y)} = \frac{-2y}{(2-y)^2(2+y)}; \\
 2) \quad &\frac{-2y}{(2-y)^2(2+y)} : \frac{2}{(y-2)^2} = \frac{-2y(y-2)^2}{(2-y)^2(2+y)2} = \frac{-y}{2+y}; \\
 3) \quad &\frac{y}{y+2} + \frac{-y}{2+y} = \frac{y-y}{2+y} = 0.
 \end{aligned}$$

Ответ: 0.

Пример 5. Упростить выражение А и найти его значение при $m = 2,14$, $n = -4,28$, если

$$A = \frac{m^{-2}}{m^{-2} - n^{-2}} : \left(\frac{m^{-2}}{m^{-2} - n^{-2}} - \frac{n^{-2} + m^{-2}}{m^{-2}} \right).$$

Решение. Способ 1.

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{\frac{1}{m^2}}{\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}} : \left(\frac{\frac{1}{m^2}}{\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}} - \frac{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{m^2}}{\frac{1}{m^2}} \right) = \\
 &= \frac{\frac{1}{m^2}}{\frac{n^2 - m^2}{m^2 n^2}} : \left(\frac{\frac{1}{m^2}}{\frac{n^2 - m^2}{m^2 n^2}} - \frac{\frac{m^2 + n^2}{n^2 m^2}}{\frac{1}{m^2}} \right) =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1 \cdot m^2 n^2}{m^2 (n^2 - m^2)} : \left(\frac{\cancel{n^2} 1 \cdot m^2 n^2}{m^2 (n^2 - m^2)} - \frac{\cancel{n^2 - m^2} (m^2 + n^2) m^2}{n^2 m^2 \cdot 1} \right) = \\
 &= \frac{n^2}{n^2 - m^2} : \frac{n^4 - (m^2 + n^2)(n^2 - m^2)}{n^2 (n^2 - m^2)} = \\
 &= \frac{n^2 n^2 (n^2 - m^2)}{(n^2 - m^2)(n^4 - n^4 + m^4)} = \frac{n^4}{m^4} = \left(\frac{n}{m} \right)^4; \\
 A \Big|_{\substack{m=2,14 \\ n=-4,28}} &= \left(\frac{-4,28}{2,14} \right)^4 = (-2)^4 = 16.
 \end{aligned}$$

Ответ: $A = \left(\frac{n}{m} \right)^4$; $A = 16$ при $m = 2,14$, $n = -4,28$.



▲ **Способ 2.** Умножив числитель и знаменатель каждой дроби в выражении A на $m^2 n^2$, получим:

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{m^{-2} m^2 n^2}{(m^{-2} - n^{-2}) m^2 n^2} : \left(\frac{m^{-2} m^2 n^2}{(m^{-2} - n^{-2}) m^2 n^2} - \frac{(n^{-2} + m^{-2}) m^2 n^2}{m^{-2} m^2 n^2} \right) = \\
 &= \frac{n^2}{n^2 - m^2} : \left(\frac{n^2}{n^2 - m^2} - \frac{m^2 + n^2}{n^2} \right) = \\
 &= \frac{n^2 (n^2 - m^2) n^2}{(n^2 - m^2)(n^4 - (n^4 - m^4))} = \frac{n^4}{m^4} = \left(\frac{n}{m} \right)^4. \blacktriangle
 \end{aligned}$$



1. Какое выражение называется рациональным?
2. Можно ли назвать рациональным выражением:
 - а) рациональную дробь;
 - б) многочлен;
 - в) одночлен;
 - г) число $a \neq 0$;
 - д) число 0?
3. Какое выражение называется целым?
4. Являются ли целыми выражения:

$$\frac{2}{3}; \frac{7}{13} a^2 b^3 c; 0; 5mn^{-2}?$$
5. Про какие выражения говорят, что они не имеют смысла?

Упражнения

6.85°. Используя выражения

$$A = x^2 - 5y^3 + 1; B = 4xy - 3,5; C = \frac{1}{3}x + y,$$

составьте пять различных целых выражений.

6.86. Является ли целым выражение:

1) $\frac{3x + 5y}{913};$

2) $\frac{2a - 4b}{27b};$

3) $(9x - 6y)^{-1};$

4) $(7a + 3b)c^{-1};$

5) $\frac{5}{4a}(a^2 - 3a + 4);$

6) $\frac{5a}{4}\left(a^3 - 2a^2 - \frac{7}{4}\right)?$

6.87. Преобразуйте целое выражение в многочлен стандартного вида и найдите его значение:

1) $A = (x - 3)(x - 2) - (x + 2)(x - 5)$ при $x = -2\frac{1}{2};$

2) $B = (a - 6)(a - 1) - (a + 3)(a - 4)$ при $a = -1\frac{1}{6};$

3) $C = (y - 3)(y - 4) + (y + 6)(y - 7) - 2y^2$ при $y = -3;$

4) $D = (b - 1)(b + 2) - (b + 3)(b + 4)$ при $b = -2;$

5) $F = (m + 1)(m - 2) - (m + 3)(m - 4)$ при $m = 2,9;$

6) $K = (n - 1)(n + 2) - (n - 3)(n + 4)$ при $n = -3,8.$

6.88. Решите уравнение:

1) $(3x - 4)(2x - 8) - (x + 7)(6x - 3) = 124;$

2) $(4a - 1)(3a + 5) - (6a - 12)(2a - 7) = 77;$

3) $(b - 1)(b + 2) - (b - 3)(b - 4) = 6;$

4) $(2a - 3)(3a + 1) - (6a - 2)(a - 4) = 27;$

5) $4(x - 1)(x - 2) - (2x - 3)(2x + 3) = 38;$

6) $2(3a - 1)(2a + 5) - 6(2a - 1)(a + 2) = 50;$

7) $3(-4b + 1)(b - 1) + 2(6b - 4)(b + 3) = 59;$

8) $5(2x - 3)(2x + 2) - 4(5x - 4)(x - 1) = 32.$

6.89. Преобразуйте целое выражение в многочлен стандартного вида (m и n — натуральные числа):

- 1) $(b^{2n} - b^n a^m + a^{2m})(a^m + b^n)$;
- 2) $(c^{4m} - c^m p^{m+1} + p^{6m})(c^m + p^{m+1})$;
- 3) $(c^{2m} + c^{2m+2} + c^{2m+4})(c^{m+1} - c^{m+3})$;
- 4) $(c^{2m+4} + c^{2m} + c^{2m+2})(c^m - c^{m+2})$.

6.90. При каком значении t рациональное выражение не имеет смысла:

- 1) $\frac{2t}{t+3}$;
- 2) $\frac{t}{t-5}$;
- 3) $\frac{t}{t-10} + \frac{2t}{t+1}$;
- 4) $\frac{8t}{t+16} - \frac{7t}{1-t}$?

6.91. При каком значении a рациональное выражение не имеет смысла:

- 1) $\frac{4a+13}{2,32-(5a-1,18)}$;
- 2) $\frac{3a-6}{2,41-(3a-11,99)}$;
- 3) $\frac{5^2-3^2}{(2,5a+0,75)(-0,3)}$;
- 4) $\frac{1^2+4^2}{(-0,01a-4,9)54,2}$?

6.92. При каком значении n не имеет смысла выражение:

- 1) $\frac{6n-18}{n^2-4}$;
- 2) $\frac{21n}{n(n+1)}$;
- 3) $\frac{12n}{(n-1)(n+5)}$;
- 4) $\frac{1}{1+\frac{1}{n}}$;
- 5) $\frac{1}{1-\frac{1}{n}}$;
- 6) $\frac{n}{|n|-3}$;

7) $\frac{2n}{|n|+4};$

8) $\frac{4n+1}{n^2+5};$

9)* $\frac{8n+7}{n^3+125};$

10)* $\frac{7n+6}{n^3-8}?$

6.93. Сократите дробь:

1) $\frac{a^3 - ab^2}{ab - a^2};$

2) $\frac{mn - n^2}{mn^3 - m^3n};$

3) $\frac{36a - a^3}{a^3 - 12a^2 + 36a};$

4) $\frac{9m^2 - 16}{16 - 24m + 9m^2};$

5)* $\frac{2n+1}{8n^3+1};$

6)* $\frac{27a^3 - b^3}{15a - 5b};$

7)* $\frac{a^2 + ab + b^2}{a^3 - b^3};$

8)* $\frac{m^2 - mn + n^2}{m^3 + n^3}.$

Выполните действия (6.94—6.96).

6.94. 1) $\frac{b^2 - 49}{b^2 - 5b} \cdot \frac{b^2 - 25}{b^2 - 7b};$

2) $\frac{7 - 7x}{(1 + x)^2} \cdot \frac{6 + 6x}{14 - 14x^2};$

3) $\frac{(a + b)^2}{ab - b^2} : \left(-\frac{ab + b^2}{(a - b)^2} \right);$

4) $\frac{8a + 8b}{3a - 3b} : \frac{24a + 24b}{6a - 6b}.$

6.95. 1) $\frac{5c^2 - 10cd}{c^2 + 4d^2} \cdot \frac{c^4 - 16d^4}{15(c - 2d)^2};$

2) $\frac{4m^2 + 12mn}{2m^2 + 3n^2} \cdot \frac{4m^4 - 9n^4}{7m^2 + 63n^2 + 42mn};$

3) $\frac{16x^2 - 9y^2}{x^2 - 9y^2} \cdot \frac{x^2 + 6xy + 9y^2}{16x^2 - 24xy + 9y^2};$

4) $\frac{m^2 - 4n^2}{9m^2 - n^2} : \frac{m^2 + 4mn + 4n^2}{9m^2 - 6mn + n^2}.$

- 6.96. 1) $\frac{3t}{t-4} - \frac{t+2}{2t-8} \cdot \frac{96}{t^2+2t}$;
2) $\frac{2t}{t-2} + \frac{t+7}{8-4t} \cdot \frac{32}{7t+t^2}$;
3) $\frac{m-2}{m^2} \cdot \frac{mn-m}{m-2} + \frac{2-n}{2m}$;
4) $\frac{5-a}{a^3} \cdot \frac{ab-a}{5-a} + \frac{5-b}{5a^2}$;
5) $\left(\frac{m+5}{m} - \frac{n+5}{n}\right) \frac{mn}{m^2-n^2}$;
6) $\left(\frac{m-10}{m} - \frac{k-10}{k}\right) \frac{km}{k^2-m^2}$.

6.97. Найдите значение выражения:

- 1) $\left(\frac{m+1}{2m-2} - \frac{1}{2m^2-2}\right) \frac{2m+2}{m+2}$ при $m = \frac{1}{2}$;
2) $\left(\frac{a^2+24}{a^2-25} - \frac{4}{a-5}\right) \frac{3a-15}{a-2}$ при $a = -\frac{1}{3}$.

Выполните действия (6.98—6.99).

- 6.98. 1) $\left(\frac{n^2}{m^3-mn^2} + \frac{1}{m+n}\right) : \left(\frac{m-n}{m^2+mn} - \frac{m}{mn+n^2}\right)$;
2) $\left(\frac{m^2}{m+n} - \frac{m^3}{m^2+n^2+2mn}\right) : \left(\frac{m}{m-n} - \frac{m^2}{m^2-n^2}\right)$.
- 6.99. 1) $\left(\frac{a^2-x^2}{a+b} \cdot \frac{a^2-b^2}{ax+x^2} \left(a + \frac{ax}{a-x}\right)\right) : \frac{a^3-ab^2}{5x^3}$;
2) $\left(\frac{k^2-kc}{2c} : (k^2-c^2)\right) \left(\frac{k+c^2}{2kc} - 1\right) : \frac{k^2-2kc+c^2}{16c^3}$.

6.100. Найдите значение выражения:

- 1) $\left(\frac{m^2-16n^2}{25m^2-4n^2} : \frac{m^2+16n^2+8mn}{25m^2+4n^2+20mn}\right) : \frac{m-4n}{5m-2n}$
при $m = -2$, $n = -3$;

$$2) \left(\frac{m^2 - 9n^2}{49m^2 - 16n^2} : \frac{9n^2 + m^2 + 6mn}{49m^2 + 16n^2 + 56mn} \right) : \frac{m - 3n}{4n - 7m}$$

при $m = -1$, $n = -2$.

Выполните действия (6.101—6.102).

$$6.101. 1) \left(\frac{5}{k+4} - \frac{4}{16k - k^3} \right) : \left(\frac{5k-7}{k+4} + \frac{4-13k}{k^2+4k} \right);$$

$$2) \left(\frac{9}{a^3-9a} + \frac{1}{a+3} \right) : \left(\frac{a-3}{a^2+3a} - \frac{a}{3a+9} \right).$$

$$6.102. 1) \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{2}{a+b} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \right) : \frac{(a+b)^2}{ab};$$

$$2) \left(\frac{2}{m^2} + \frac{2}{n^2} - \frac{4}{m-n} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right) \right) : \frac{(m-n)^2}{2mn};$$

$$3) \left(\frac{3m^2+3n^2}{2m} + 3n \right) : \left(\frac{9}{m} + \frac{9}{n} \right) \frac{36n}{m^2n - n^3};$$

$$4) \left(\frac{k^2+x^2}{2x} - k \right) : \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{k} \right) \frac{4}{k^3 - kx^2}.$$

6.103. Решите уравнение и сделайте проверку:

$$1) \frac{4+3y}{y^2-9} + \frac{y}{3-y} = 0;$$

$$2) \frac{2x+25}{x^2-4} + \frac{x}{2-x} = 0;$$

$$3)* \frac{x^2-16}{5x+5} : \frac{x^2+16-8x}{10x-10} = 0;$$

$$4)* \frac{x^2-100}{16x-32} : \frac{x^2-20x+100}{5x-10} = 0.$$

Выполните действия (6.104—6.109).

$$6.104. 1) \left(\frac{5m^3n^4}{9k^2} \right)^3 : \left(\frac{5m^2n^2}{3k^3} \right)^4;$$

$$2) \left(\frac{3m^5n^3}{4b^4} \right)^3 : \left(\frac{3m^3n^2}{16b^6} \right)^4.$$

$$6.105. 1) \frac{a^4 - b^6}{3a^8 - 12b^{10}} : \frac{4a^4 - 8a^2b^3 + 4b^6}{7a^4 + 14b^5};$$

$$2) \frac{a^8 - b^{10}}{2a^{10} - 32b^{14}} : \frac{5a^8 + 5b^{10} + 10a^4b^5}{4a^5 - 16b^7};$$

$$3)* \frac{a^5b - 8a^2b}{a^3b + 2a^2b} \cdot \frac{4ab^2 - a^3b^2}{a^3b^2 + 2a^2b^2 + 4ab^2};$$

$$4)* \frac{a^4b + ab^4}{a^2b^2 + ab^3} \cdot \frac{a^3b + a^2b^2}{a^3b - ab^3}.$$

$$6.106. 1) \frac{4^{-4}(ab^0 + c^0a + m^0a)^{-5}}{16^{-2}a^{-4}};$$

$$2) \frac{3^6(a^0x + b^0x + c^0x)^{-3}}{5^{-1}x^{-2}};$$

$$3) (1 - x^{-3})^{-1}(x^3 - 1);$$

$$4) (1 - x^{-4})(x^4 - 1).$$

$$6.107. 1) \frac{x^{-1} + y^{-1} + z^{-1}}{xy + xz + yz}; \quad 2) \frac{a^{-1} - b^{-1} - c^{-1}}{ab + ac - bc};$$

$$3) \frac{x^{-4} - y^{-4}}{x^{-2} + y^{-2}}; \quad 4) \frac{a^{-2} - b^{-2}}{a^{-4} - b^{-4}};$$

$$5) \frac{x^{-3} + y^{-3}}{x^{-1} + y^{-1}}; \quad 6) \frac{m^{-3} - n^{-3}}{m^{-1} - n^{-1}}.$$

$$6.108*. 1) \frac{a^{-2} + 2b^{-4}}{a^{-4} + 2a^{-2}b^{-4} + b^{-8}} - \frac{a^{-2} - 2b^{-4}}{a^{-4} - b^{-8}};$$

$$2) \frac{a^{-3} - 3b^{-6}}{a^{-6} - 2a^{-3}b^{-6} + b^{-12}} - \frac{a^{-3} + 3b^{-6}}{a^{-6} - b^{-12}};$$

$$3) \frac{a^{-4} + b^{-4}}{b^{-10}} : \frac{a^{-4}b^{-6} + b^{-10}}{b^{-2}};$$

$$4) \frac{a^{-2} + b^{-2}}{a^{-2}} : \frac{a^{-2}b^{-2} + a^{-4}}{a^{-1}};$$

$$5) \frac{m^{-2} - 3m^{-1}n^{-1}}{12n^{-1}} : \frac{m^{-1}n^{-1} - 3n^{-2}}{36m^{-1}};$$

$$6) \frac{a^{-1}m^{-1} - 5m^{-2}}{30a^{-1}n^{-1}} : \frac{a^{-2} - 5a^{-1}m^{-1}}{60m^{-1}n^{-1}};$$

$$7) -\frac{a^{-3} - 2a^{-2}b^{-1}}{72b^{2-n}} : \frac{2b^{-3} - a^{-1}b^{-2}}{48b^{-n}};$$

$$8) \frac{2x^{-2} - 3y^{-2}}{100x^{2-k}} : \left(-\frac{3y^{-5} - 2x^{-2}y^{-3}}{400x^{1-k}} \right).$$

$$6.109*.1) (a^{-1} + b^{-1}) \left(\frac{a^2 + b^2 + 2ab}{2ab} \right)^{-1};$$

$$2) (ab^{-1} - a^{-1}b)(a - b)^{-1};$$

$$3) (m^2 - n^{-1}m + n^{-2})(m^{-1} + n) - m^{-3}(m^{-1}n)^{-2};$$

$$4) \left(\frac{a^{-1} - b^{-1}}{a^{-1} + b^{-1}} - \frac{a^{-1} + b^{-1}}{a^{-1} - b^{-1}} \right) \left(\frac{4ab}{b^2 - a^2} \right)^{-1};$$

$$5) \left(a^{-1} - \frac{a^{-2} + b^2}{a^{-1} + b^{-1}} \right) : \left(\frac{1}{b^{-1}} + \frac{2}{a^{-1} - b^{-1}} \right)^{-1};$$

$$6) \left(\frac{2}{a^{-1}} - \frac{4}{a^{-1} + 2} \right) : \left(2 + \frac{a^{-2} + 4}{a^{-1} - 2} \right)^{-1};$$

$$7) \left(3 + \frac{12a^{-1}b^{-1} + 49b^{-2}}{12a^{-2} - 32a^{-1}b^{-1}} \right) \left(\frac{1}{6a^{-1} - 7b^{-1}} - \frac{9b^{-1}}{(7b^{-1} - 6a^{-1})^2} \right);$$

$$8) \frac{\frac{81x^{-2} + 48x^{-1}y^{-1}}{24x^{-1}y^{-1} - 16y^{-2}} - 4}{\frac{9x^{-1} - 8y^{-1}}{3x^{-1} - 2y^{-1}} + \frac{24y^{-1} - 27x^{-1}}{2y^{-1}}}.$$

МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

**1. Упражнения на повторение
арифметического материала курса математики
5—6-х классов**

1. Запишите в виде смешанной дроби неправильную дробь:

1) $\frac{11}{3}$; 2) $\frac{103}{7}$; 3) $\frac{155}{9}$; 4) $\frac{108}{71}$;
5) $\frac{5003}{49}$; 6) $\frac{8010}{89}$; 7) $\frac{5210}{11}$; 8) $\frac{20160}{5043}$.

2. Запишите в виде неправильной дроби смешанную дробь:

1) $3\frac{2}{5}$; 2) $6\frac{5}{6}$; 3) $7\frac{9}{25}$; 4) $5\frac{6}{51}$;
5) $15\frac{2}{9}$; 6) $1\frac{23}{27}$; 7) $3\frac{11}{23}$; 8) $10\frac{15}{19}$.

3. Сократите дробь:

1) $\frac{18}{24}$; 2) $\frac{45}{90}$; 3) $\frac{106}{530}$; 4) $\frac{930}{3100}$;
5) $\frac{121}{308}$; 6) $\frac{490}{930}$; 7) $\frac{10710}{21420}$; 8) $\frac{5040}{20160}$.

4. Найдите:

1) $\frac{4}{5}$ от 630; 2) $\frac{5}{16}$ от 144;
3) $\frac{9}{25}$ от 700; 4) $\frac{15}{128}$ от 6144;
5) $\frac{104}{135}$ от 14 580; 6) $\frac{75}{238}$ от 48 790.

5. Найдите число, если:

- 1) $\frac{7}{18}$ его составляют 980;
- 2) $\frac{19}{36}$ его составляют 1140;
- 3) $\frac{37}{75}$ его составляют 2960;
- 4) $\frac{68}{125}$ его составляют 2720;
- 5) $\frac{76}{305}$ его составляют 6080;
- 6) $\frac{11}{408}$ его составляют 1650.

6. Даны числа: 405; 421; 822; 1854; 3120; 3478; 2610; 58 035; 83 848; 513 135. Укажите числа, делящиеся на:

- 1) 2; 2) 3; 3) 5;
- 4) 9; 5) 2 и 3; 6) 2 и 5;
- 7) 3 и 5; 8) 5 и 9; 9) 3 и 9.

7. Найдите наибольший общий делитель чисел:

- 1) 30 и 45; 2) 90 и 180; 3) 32 и 48;
- 4) 150 и 175; 5) 380 и 378; 6) 7200 и 612;
- 7) 8, 24 и 80; 8) 5, 7 и 12; 9) 50, 60 и 70.

8. Найдите наименьшее общее кратное чисел:

- 1) 10 и 14; 2) 12 и 8;
- 3) 20 и 90; 4) 34 и 51;
- 5) 360 и 180; 6) 144 и 198;
- 7) 32, 36 и 48; 8) 80, 240 и 360;
- 9) 100, 150 и 250.

Выполните действия (9—12).

9. 1) $8\frac{3}{4} \cdot 1\frac{3}{5} : \left(2\frac{3}{4} + \frac{3}{4}\right) : \frac{1}{3} + \frac{2}{3}$;

$$2) 2\frac{2}{3}\left(2\frac{4}{5} + \frac{19}{20}\right)\left(4\frac{1}{5} - \frac{22}{35}\right) : 1\frac{2}{5};$$

$$3) 3\frac{11}{45} : \left(\frac{5}{18} + 2\frac{1}{3} - 1\frac{4}{5}\right) : \left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{8} + \frac{5}{24}\right);$$

$$4) \left(12 - \frac{5}{8}\right) : \left(2\frac{7}{24} + 5\frac{5}{6}\right)\left(2\frac{1}{3} - 1\frac{13}{21}\right) - \frac{3}{5};$$

$$5) \frac{2}{3} + \frac{15}{22}\left(4\frac{1}{5} - 3\frac{5}{6}\right) : \left(1\frac{1}{4} + 1\frac{3}{7}\right)3\frac{4}{7};$$

$$6) \left(5\frac{11}{12} + 1\frac{23}{24}\right) : \left(1 - \frac{5}{7}\right) : \left(7\frac{1}{2} - \frac{23}{24}\right)\frac{1}{5}.$$

$$10. 1) 7,7 : 2,5 + 2,4 \cdot 0,8 - 14,21 : 3,5;$$

$$2) 6,08 \cdot 0,75 - 10,286 : 6,95 + 0,04 \cdot 173;$$

$$3) 225,15 : 3,75 \cdot 8,05 + (20,1 - 3,422);$$

$$4) (40,1 - 3,754) + 1113,39 : 27,8 \cdot 9,08;$$

$$5) 20 - \frac{70 - (8,05 \cdot 7,04 + 31,8008 : 6,35)}{0,8} : 13;$$

$$6) 10,3 - \frac{4,05 \cdot 60,8 - 257,014 : 4,28 + 1,01}{260} : 0,9.$$

$$11. 1) \left(\frac{3}{16} + 0,7715 - \frac{33}{500}\right) : 4\frac{3}{4};$$

$$2) 5,85 + \frac{15}{28} : 4\frac{2}{7} - 3\frac{5}{6} \cdot \frac{15}{23};$$

$$3) \left(2\frac{3}{4} + 0,15\right) : \frac{4}{5} + 34,17 : 1,7 - 23\frac{3}{8};$$

$$4) 1,25 - 7,5\left(3\frac{2}{3} + 2,5\right) + \frac{1,4}{5} : 0,05;$$

$$5) 5\left(\frac{1}{7} \cdot 2,8 + 5 : 3,75 - \frac{4}{15}\right);$$

$$6) \left(\frac{4}{9} + 0,75 - \frac{11}{15} - 0,4\right) : 0,55.$$

$$12. 1) \left(-1\frac{2}{3}\right)^2 1\frac{4}{5} - 0,2 : \frac{2}{65};$$

$$2) 1\frac{3}{5} : 0,8 + \left(-1\frac{1}{2}\right)^3 0,8;$$

$$3) -0,2^2 \cdot 1\frac{2}{3} + \frac{1}{30} : 0,6; \quad 4) -0,5^3 : 1\frac{1}{4} + 0,5 \cdot \frac{2}{15};$$

$$5) \left(1\frac{1}{5} \cdot 0,8 - 1,2^2\right) : 3,2; \quad 6) \left(1,6^2 - 0,2 \cdot 1\frac{3}{5}\right) : 3\frac{1}{5}.$$

13. Сравните $|a|$ и $|b|$, если:

$$1) a = 12, b = -27;$$

$$2) a = -45, b = 13;$$

$$3) a = -6, b = -1;$$

$$4) a = -0,5, b = 0,005;$$

$$5) a = 3,9, b = -3\frac{3}{4};$$

$$6) a = -8\frac{1}{3}, b = 8,3.$$

14. Укажите наибольшее из чисел a , b , c и d , если:

$$a = \left| \left(-3\frac{4}{5} - \left(-4\frac{3}{10} \right) \right) : \left(-1\frac{1}{3} \right) \right|;$$

$$b = \left| \left(5\frac{7}{8} - 6\frac{1}{12} \right) : \left(-3\frac{1}{8} \right) \right|;$$

$$c = \left| \left(-2\frac{3}{20} - \left(-1\frac{5}{8} \right) \right) : 2,45 \right|;$$

$$d = \left| \left(-2\frac{5}{12} - 3\frac{5}{12} \right) : \left(-4\frac{13}{20} \right) \right|.$$

15. Укажите наименьшее из чисел a , b , c и d , если:

$$a = \left| \left(-\frac{15}{32} - \left(-\frac{5}{24} \right) \right) \left(\frac{11}{25} - \left(-\frac{7}{40} \right) \right) \right|;$$

$$b = \left| \left(\frac{9}{25} + \left(-\frac{7}{15} \right) \right) \left(-\frac{13}{16} + \frac{7}{24} \right) \right|;$$

$$c = \left| \left(-\frac{9}{16} - \left(-\frac{9}{24} \right) \right) : \left(\frac{17}{40} - \frac{7}{24} \right) \right|;$$

$$d = \left| \left(-\frac{25}{28} + \frac{10}{21} \right) : \left(\frac{24}{35} + \left(-\frac{11}{14} \right) \right) \right|.$$

Решите уравнение (16—20).

16. 1) $10\frac{2}{3} + x - 3\frac{3}{5} = 2\frac{1}{3} + 4\frac{4}{5};$

2) $y + \frac{7}{22} = 3 - 2\frac{4}{11} + \frac{15}{22};$

3) $x + 1\frac{1}{6} - 2,5 = \frac{1}{12};$

4) $1\frac{4}{15} + y - 2\frac{1}{6} = \frac{3}{5};$

5) $\left(\frac{55}{84} : y + 1\frac{1}{2}\right) \frac{5}{33} = 2\frac{1}{2};$

6) $1\frac{5}{28} \left(x : 3\frac{3}{5} - \frac{1}{7}\right) = 2\frac{5}{14}.$

17. 1) $\frac{3x}{1,2} + 0,4 = 0,6;$

2) $\frac{17,67}{2x} - 4 = 2,2;$

3) $0,3 : \frac{1 - 0,25}{x - 0,75} = 0,1;$

4) $1 : \frac{0,1 - x}{0,6 - 0,58} = 2;$

5) $\frac{\frac{5}{7} \cdot 2\frac{1}{3} \cdot \frac{5}{6} - x}{1 - \frac{7}{8} \cdot \frac{3}{14} \cdot 1\frac{3}{5}} = \frac{5}{9};$

6) $\frac{1\frac{8}{13} \cdot \frac{13}{42} + 5\frac{5}{7} : \frac{8}{21}}{8\frac{1}{8} + x} = 3\frac{1}{3}.$

18. 1) $1\frac{4}{5} : 4,5 = 6\frac{2}{3} : x;$

2) $0,2 : 14\frac{4}{5} = x : 12\frac{1}{3};$

3) $\frac{2\frac{1}{2} - x}{x} = \frac{7\frac{1}{2}}{1\frac{7}{8}};$

4) $\frac{1\frac{3}{4} + x}{x} = \frac{3\frac{1}{5}}{\frac{2}{5}};$

$$5) \frac{0,3}{0,4x - 1,5} = \frac{9}{4,2 - 0,3x};$$

$$6) \frac{3,2 + 0,8(5,5 - 3,25)}{x} = \frac{1,12 \cdot 1\frac{1}{9}}{5\frac{7}{18} - 4\frac{23}{30}}.$$

$$19. \quad 1) \frac{2}{5}x - 8 = \frac{1}{2}x + 2; \quad 2) 12 - \frac{3}{5}x = 29 + \frac{1}{4}x;$$

$$3) \frac{5}{26}(3 - 2y) = y - \frac{3}{2}; \quad 4) 2y + \frac{4}{3} = \frac{2}{3}(4y - 1);$$

$$5) \frac{1}{2}(1 - 3b) = 3\frac{1}{2}(3b + 1);$$

$$6) \frac{1}{2}(2 - t) = 5\frac{1}{2}(1 + 3t).$$

$$20. \quad 1) \left| \frac{3}{4} - x \right| = \frac{1}{2}; \quad 2) \left| x + \frac{5}{6} \right| = \frac{7}{18};$$

$$3) \left| \frac{7}{3} + x \right| = \frac{11}{21}; \quad 4) \left| 1\frac{1}{5} - x \right| = 1\frac{1}{4};$$

$$5) 2|3 - x| = 13; \quad 6) 19 : |7 - x| = 5;$$

$$7) \left| 2|x| - \frac{3}{2} \right| = \frac{1}{2}; \quad 8) \left| 3|x| - \frac{2}{3} \right| = \frac{1}{3}.$$

2. Задачи на проценты

Напомним, что процентом называют число $\frac{1}{100}$, т. е.

$$1 \% = \frac{1}{100}.$$

Поэтому все задачи, в условии которых используют проценты, легко переформулировать в задачи с дробями. **Задача на нахождение процента числа** — это то же самое, что **задача на нахождение части числа**. **Задача на нахождение числа по проценту** — это фактически **задача на нахождение числа по его части**.

В самом деле, найти 15 % числа x означает найти $\frac{15}{100}$ числа x , для этого надо x умножить на $\frac{15}{100}$, т. е.

$$x \cdot \frac{15}{100}.$$

Таким образом,



чтобы найти число n , которое составляет p % числа x , надо умножить x на $\frac{p}{100}$, т. е.

$$n = x \cdot \frac{p}{100}.$$

Разделив обе части равенства на $\frac{p}{100}$, получим



$$x = n : \frac{p}{100}, \text{ т. е. } x = n \cdot \frac{100}{p}$$

— это формула нахождения числа x по проценту. В этой формуле показано, как найти число x , зная, что p % его равны n .

Рассмотрим несколько задач.

Задача 1. Сторону квадрата увеличили на 10 %. На сколько процентов увеличится площадь квадрата?

Решение. Увеличение на 10 % — это увеличение на одну десятую, так как $10 \% = 0,1$. Если сторона квадрата была a , то стала $a + 0,1a$, т. е. $1,1a$. Площадь квадрата была a^2 , а стала $(1,1a)^2$, т. е. $1,21a^2$. Таким образом, площадь увеличилась на $0,21a^2$, т. е. на 21 % ($0,21 = 0,21 \cdot 100 \% = 21 \%$).

Ответ: на 21 %.

Задача 2. Мальчиков в классе на 20 % меньше, чем девочек, если число девочек принять за 100 %. На сколько процентов девочек больше, чем мальчиков? Сколько процентов числа учащихся класса составляют девочки?

Решение. $20 \% = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$.

Пусть в классе x девочек. Тогда в классе $\left(x - \frac{1}{5}x\right)$ мальчиков, т. е. $\frac{4}{5}x$; соответственно $\left(x + \frac{4}{5}x\right)$ человек — число всех учеников в классе, т. е. $\frac{9}{5}x$. Отношение числа девочек к числу мальчиков равно

$$x : \frac{4}{5}x = \frac{5}{4} = \frac{5}{4} \cdot 100 \% = 125 \%,$$

т. е. девочек на 25 % больше, чем мальчиков.

Отношение числа девочек к числу всех учащихся в классе равно

$$x : \frac{9}{5}x = \frac{5}{9} = \frac{5}{9} \cdot 100 \% = \frac{500}{9} \% = 55\frac{5}{9} \%.$$

Ответ: на 25 %; $55\frac{5}{9} \%$.

Задача 3. Виноград содержит 75 % воды, а полученный из него изюм содержит 20 % воды. Сколько изюма получится из 320 кг винограда?

Решение. Поскольку в свежем винограде 75 % воды, то масса сухого вещества в нем составляет 25 %, т. е. $320 \cdot 0,25 = 80$ (кг). В изюме масса сухого вещества составляет уже 80 %, так как 20 % занимает вода. Таким образом, на 1 % приходится 1 кг сухого вещества, значит, масса изюма составляет 100 кг.

Этот же результат можно было получить, разделив 80 кг на 80 %, т. е. разделив 80 кг на 0,8, как и находят число по его части:

$$80 : 0,8 = 100 \text{ (кг)}.$$

Ответ: 100 кг.

Задача 4. Было 100 кг грибов с влажностью 99 %. Грибы подсушили, после чего влажность стала 98 %. Какова масса подсушенных грибов?

Попробуйте, не читая решение задачи, угадать ответ из четырех предложенных вариантов: а) 90 кг; б) 97 кг; в) 50 кг; г) 2 кг. Какой из них показался вам наиболее правдоподобным?

Решение. *Способ 1.* Влажность 99 % означает, что масса сухого вещества составляет $1 \% = 0,01$ всей массы и равна 1 кг. Масса сухого вещества грибов не изменяется при подсушивании, но после сушки этот же 1 кг сухого вещества составит уже $2 \% = 0,02$ массы подсушенных грибов, т. е. на 1 % приходится 0,5 кг. Следовательно, масса подсушенных грибов — 50 кг.

Этот результат можно было бы найти и так:

$$1 : 0,02 = 50 \text{ (кг)}.$$

Ответ: 50 кг.

Фактически мы решили задачу 4 по действиям, не прибегая к помощи уравнений. Покажем, как решить эту задачу, используя уравнение.



Способ 2. Пусть x кг — масса подсушенных грибов, тогда 2 % этой массы, т. е. $x \cdot 0,02$ (кг) — масса сухого вещества. Но на массу сухого вещества первоначально приходился 1 % от 100 кг, т. е. $100 \cdot 0,01$. Составим уравнение

$$x \cdot 0,02 = 100 \cdot 0,01,$$

откуда получим

$$x = 1 : 0,02,$$

$$x = 50.$$

Решите самостоятельно эту же задачу при условии, что влажность грибов после сушки стала: 1) 96 %;

2) 80 %; 3) 50 %. Должны получиться следующие результаты: 1) 25 кг; 2) 5 кг; 3) 2 кг — поясните их.

Задача 5. В сквере растут березы и клены. Всего 72 дерева. Березы составляют 62,5 % всех деревьев. Сколько берез надо еще посадить, чтобы берез в сквере стало 70 %?

Решение. Поскольку $62,5 \% = 0,625$, то в парке $72 \cdot 0,625$, т. е. 45 берез. Пусть посадили еще x берез, тогда березы составили 70 % числа всех деревьев. Берез стало всего $45 + x$. Поскольку 70 % числа всех деревьев в сквере равно $(72 + x)0,7$, то составим уравнение

$$(72 + x)0,7 = 45 + x.$$

Решив это уравнение, получим $x = 18$.

Ответ: 18 берез.

Упражнения

21. 1) Найдите $\frac{2}{3}$ числа:

а) 1; б) 2; в) 14,2; г) 0,12.

2) Найдите $\frac{4}{5}$ числа:

а) 3; б) 5; в) 25,5; г) 0,36.

22. 1) Найдите число, если $\frac{2}{5}$ его составляют:

а) 10; б) 2; в) $\frac{11}{6}$; г) $\frac{2}{5}$.

2) Найдите число, если $\frac{3}{7}$ его составляют:

а) 30; б) 6; в) $\frac{4}{9}$; г) $\frac{3}{7}$.

23. 1) Найдите 16 % числа:

а) 1; б) 32; в) 1,2; г) $\frac{1}{3}$.

2) Найдите 58 % числа:

а) 2; б) 10; в) 14,2; г) 0,12.

24. 1) Найдите число, если 15 % его равны:
а) 6; б) 14; в) $\frac{11}{3}$; г) 0,85.
2) Найдите число, если 42 % его равны:
а) 7; б) 50; в) $\frac{12}{7}$; г) 21,42.
25. 1) В одном арбузе 92 % воды. Сколько процентов воды в:
а) 2 арбузах; б) 3 арбузах; в) 100 арбузах?
2) Тело человека содержит около 60 % воды. Сколько воды в теле человека массой:
а) 60 кг; б) 72 кг; в) 80 кг?
26. 1) Площадь Суматры составляет 178 % площади Великобритании. Какова площадь Великобритании, если площадь Суматры 435 000 км²? (Ответ округлить до сотен тысяч.)
2) Площадь Новой Гвинеи на 13 % больше площади Калимантана. Какова площадь Новой Гвинеи, если площадь Калимантана составляет 734 000 км²? (Ответ округлить до сотен тысяч.)
27. 1) Объем грунтовых вод на земном шаре примерно 100 млн км³, что составляет 7,2 % всей воды в океанах и морях. Определите объем воды в океанах и морях.
2) Поверхность суши на Земле приблизительно равна 150 000 000 км², что составляет 29,4 % всей поверхности Земли. Определите площадь поверхности Земли.
28. 1) В двух мешках находится 120 кг сахара. Если из первого мешка пересыпать во второй 6,25 % находящегося в нем сахара, то в обоих мешках сахара будет поровну. Сколько килограммов сахара было в каждом мешке первоначально?

- 2) В двух ящиках было 19 кг конфет. Если из первого ящика переложить 12,5 % конфет во второй ящик, то во втором ящике будет на 5 кг конфет больше, чем в первом. Сколько килограммов конфет было в каждом ящике первоначально?
29. 1) В двух библиотеках было 80 000 книг. После того как первая библиотека передала второй 20 % своих книг, в ней осталось в 1,5 раза больше книг, чем во второй. Сколько книг было в каждой библиотеке?
- 2) На двух складах было 90 000 т угля. После того как из первого склада вывезли 30 % имевшегося там угля, а из второго — 20 %, на первом складе осталось угля в 1,75 раза больше, чем на втором. Сколько угля было на каждом складе первоначально?
30. 1) Сторону квадрата уменьшили на 10 %. На сколько процентов уменьшилась площадь квадрата?
- 2) Сторону квадрата увеличили на 40 %. На сколько процентов увеличилась площадь квадрата?
31. 1) На сколько процентов увеличится произведение двух чисел, если одно из них увеличить на 10 %, а второе — на 20 %?
- 2) На сколько процентов уменьшится произведение двух чисел, если одно из них уменьшить на 20 %, а второе — на 10 %?
32. 1) Делимое увеличили на 56 %, делитель уменьшили на 22 %. Как и на сколько процентов изменилось частное?

- 2) Делимое уменьшили на 19 %, делитель уменьшили на 28 %. Как и на сколько процентов изменилось частное?
33. 1) Если от неизвестного числа отнять 7,5 % его, то получится 1110. Найдите неизвестное число.
2) Если к неизвестному числу прибавить 12,5 % его, то получится 56,25. Найдите неизвестное число.
34. 1) Если к неизвестному числу прибавить 4 % его, то оно увеличится на 70. Найдите неизвестное число.
2) Если из неизвестного числа вычесть 3,5 % его, то получится 386. Найдите неизвестное число.
35. 1) Ромашка при сушке теряет 85 % своей массы. Сколько килограммов ромашки нужно собрать, чтобы получить 36 кг сухих цветов?
2) Сколько сухой ромашки получится из 90 кг свежей, если она при сушке теряет 85 % своей массы?
36. 1) Сахарный тростник содержит 9 % сахара. Сколько необходимо взять сахарного тростника для получения 3,6 т сахара?
2) Сколько килограммов муки нужно для выпечки 174 кг хлеба, если припек составляет 45 %?
37. 1) Жирность молока 5 %, а жирность полученной из молока сметаны 15 %. Сколько молока требуется для получения 50 кг сметаны?
2) Сколько нужно взять молока, чтобы получить 63 упаковки масла, если известно, что масса сливок составляет 21 % массы молока, масса масла составляет 24 % массы сливок, а масса упаковки равна 20 кг?

38. 1) Как изменится число, если его сначала увеличить на 10 %, а потом полученное число уменьшить на 10 %?
2) Как изменится число, если его сначала уменьшить на 20 %, а потом полученное число уменьшить на 20 %?
39. 1) У Васи в его личной библиотеке книг на белорусском языке на 60 % больше, чем книг на русском языке. Сколько процентов числа всех книг составляют книги на русском языке?
2) В магазине «Ромашка» шоколадных конфет на 15 % меньше, чем карамели. Сколько процентов числа всех конфет составляет карамель?
40. 1) В результате очистки сырья количество примесей в нем уменьшается от 20 % в исходном сырье до 5 % в очищенном. Сколько надо взять исходного сырья для получения 160 кг очищенного сырья?
2) Свежие фрукты содержат 72 % воды, а сухие — 20 % воды. Сколько сухих фруктов получится из 20 кг свежих фруктов?
41. 1) Сколько меда получится из 3 кг нектара, если нектар содержит 70 % воды, а полученный из него мед — 19 % воды?
2) Сколько килограммов нектара приходится перерабатывать пчелам для получения 1 кг меда, если известно, что нектар содержит 70 % воды, а полученный из него мед — 19 % воды?
42. 1) Руда содержит 40 % примесей, а выплавленный из нее металл — 4 %. Сколько необходимо взять руды, чтобы получилось 15 т металла?

- 2) Свежие грибы содержат 90 % воды, а сухие — 12 %. Сколько надо взять свежих грибов, чтобы из них получилось 10 кг сухих грибов?
43. 1) Из 40 т руды выплавляют 20 т металла, содержащего 6 % примесей. Сколько процентов примесей содержится в руде?
2) Из 38 т сырья второго сорта, содержащего 25 % примесей, после переработки получается 30 т сырья первого сорта. Сколько процентов примесей содержится в сырье первого сорта?
44. 1) В группе по изучению английского языка учатся 15 мальчиков и девочек. Мальчики составляют 40 % числа всех учеников группы. Сколько мальчиков надо еще добавить в группу, чтобы они составляли 55 % числа всех учеников группы?
2) Две бригады работниц сшили 725 простыней, причем первая бригада сшила 16 % всех простыней. Сколько простыней должна еще сшить вторая бригада, чтобы простыни, которые сшила первая бригада, составляли 10 % всех простыней?
45. 1) Сплав меди и цинка массой 24 кг содержит 85 % меди. Какую массу цинка нужно добавить к этому сплаву, чтобы медь составила 60 %?
2) Имеется кусок сплава меди с оловом массой 12 кг, содержащий 45 % меди. Сколько чистого олова надо добавить к этому сплаву, чтобы получившийся новый сплав содержал 40 % меди?
46. 1) Цену товара снизили на 10 %, а затем еще на 15 %. На сколько процентов снизилась первоначальная цена?

- 2) Цену товара повысили на 10 %, а затем еще на 15 %. На сколько процентов увеличилась первоначальная цена?
47. 1) После последовательного снижения цены товара на 10 % и на 15 % ее повысили на 25 %. На сколько процентов изменилась первоначальная цена товара?
- 2) После последовательного повышения цены товара на 12 % и на 18 % ее снизили на 30 %. На сколько процентов изменилась первоначальная цена товара?
48. 1) Как изменятся цены, если их вначале снизить на 10 %, а затем повысить на 10 %?
- 2) Как изменятся цены, если их вначале повысить на 10 %, а затем снизить на 10 %?
49. 1) Цену товара снизили на 10 %. На сколько процентов надо повысить цену, чтобы она стала прежней?
- 2) Цену товара снизили на 10 %. Зарботную плату повысили на 5 %. На сколько процентов выросла покупательская способность населения?
50. 1) Из восьмилитрового сосуда, содержащего 32-процентный раствор соли, отлили 2 л и долили водой до прежнего объема, затем отлили 3 л раствора и вновь долили водой до прежнего объема. Укажите процентное содержание соли в полученном растворе.
- 2) Взяли 10 л морской воды с 5-процентным содержанием соли. Дважды одним ковшом вычерпывали из сосуда и доливали этим же ковшом в сосуд дистиллированную воду. Получили в

результате воду с 0,2-процентным содержанием соли. Сколько литров вмещает ковш?

51. 1) 40 г золота одной пробы и 60 г золота другой сплавляли и получили золото 62-й пробы. Какой пробы было взято золото первого и второго слитков, если при сплаве их поровну получается золото 61-й пробы? (Единица пробы — 1 %.)
- 2) Имеется сталь двух сортов с содержанием никеля 5 % и 40 %. Сколько нужно взять тонн стали каждого из этих сортов, чтобы получить 140 т стали с содержанием никеля 30 %?

3. Задачи на части

Задача 1. Из дачных поселков Прохладное и Холодово одновременно навстречу друг другу вышли Олег и Вася. Олег мог бы пройти расстояние от Холодово до Прохладного за 2 ч, а Вася от Прохладного до Холодово — за 3 ч. Сколько времени Вася и Олег будут идти до встречи?

Решение. Пусть x ч — время до встречи, а расстояние между поселками — a км. Скорость движения Олега $\frac{a}{2} \frac{\text{км}}{\text{ч}}$, а Васи — $\frac{a}{3} \frac{\text{км}}{\text{ч}}$. Поскольку за один час они проходят навстречу друг другу по $\left(\frac{a}{2} + \frac{a}{3}\right)$ км и встречаются через x ч, то получим уравнение

$$\left(\frac{a}{2} + \frac{a}{3}\right)x = a.$$

Решив его, найдем, что

$$x = a : \frac{5a}{6},$$

т. е. $x = \frac{6}{5}$ (ч).

Ответ: 1 ч 12 мин.



В процессе решения задачи мы получили выражение, не содержащее a . В этой задаче путь можно было принять за 1. Тогда за один час Олег проходит $\frac{1}{2}$ пути, а Вася — $\frac{1}{3}$ пути. За час они сблизятся на $\frac{5}{6}$ всего пути. Чтобы узнать, сколько пройдет времени до встречи, надо путь разделить на скорость сближения Олега и Васи: $1 : \frac{5}{6} = \frac{6}{5}$ (ч).

Задача 2. Мастер мог бы выполнить задание за 10 дней, но, проработав 4 дня, он заболел. Его заменил ученик, закончивший выполнение задания спустя 9 дней. За сколько дней ученик мог бы выполнить всю работу?

Решение. *Способ 1.* Примем объем всего задания за 1. Мастер за день выполняет $\frac{1}{10}$ задания. За 4 дня он выполнил $\frac{4}{10}$ задания. Ученику за 9 дней осталось выполнить $(1 - \frac{4}{10})$, т. е. $\frac{3}{5}$ задания. За день ученик выполнял $\frac{3}{5} : 9$, т. е. $\frac{1}{15}$ задания, значит, все задание он мог бы выполнить за $1 : \frac{1}{15}$, т. е. за 15 дней.

Ответ: 15 дней.



Способ 2. Обозначим объем всего задания буквой V . Пусть ученик может выполнить задание за x дней. Тогда за один день он выполняет $\frac{V}{x}$ задания, а за 9 дней — $\frac{9V}{x}$ задания. Производительность мастера составляет $\frac{V}{10}$ задания. За 4 дня мастер сделал $\frac{4V}{10}$, т. е. $\frac{2V}{5}$ задания.

Так как задание было выполнено, составим и решим уравнение:

$$\frac{2V}{5} + \frac{9V}{x} = V,$$

$$\frac{9V}{x} = V - \frac{2V}{5},$$

$$\frac{9V}{x} = \frac{3V}{5},$$

$$x = 15.$$

Задача 3. Через один кран бассейн наполняется за 8 ч, через другой — за 12 ч. Однажды из-за технических неполадок не закрылось сливное отверстие, и бассейн наполнился двумя кранами за сутки. За какое время можно спустить всю воду из заполненного бассейна через сливное отверстие при закрытых кранах?

Решение. *Способ 1.* Объем бассейна примем за 1. За один час первый кран наполняет $\frac{1}{8}$ бассейна, а второй — $\frac{1}{12}$ бассейна. За сутки оба крана наполнили бы $\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{12}\right)24$, т. е. 5 объемов бассейна. Значит, за сутки через сливное отверстие вылилось $5 - 1$, т. е. 4 объема бассейна. Таким образом, один объем бассейна вытечет через сливное отверстие за $24 : 4$, т. е. за 6 ч.

Ответ: 6 ч.



Способ 2. Пусть время, за которое вся вода вытекает из бассейна через сливное отверстие, x ч. Приняв за V м³ объем бассейна, получим, что за один час через первый кран наливается $\frac{V}{8}$ м³ воды, через второй — $\frac{V}{12}$ м³ воды, а через сливное отверстие выливается $\frac{V}{x}$ м³ воды. При открытом сливном от-

верстии через два крана наливается $\left(\frac{V}{8} + \frac{V}{12} - \frac{V}{x}\right) \text{ м}^3$ воды. Поскольку бассейн наполнился за сутки, то получим уравнение

$$\left(\frac{V}{8} + \frac{V}{12} - \frac{V}{x}\right)24 = V.$$

Решив его, получим: $3 + 2 - \frac{24}{x} = 1$, т. е. $x = 6$.

Задача 4. Наташа может прийти в школу из дома за 1 ч 40 мин. Ее одноклассник Виталий каждое утро в одно и то же время приезжает за ней со стороны школы на мотоцикле, и за 25 мин они приезжают в школу. Однажды Наташа вышла из дома за 10 мин до приезда Виталия и пошла ему навстречу по дороге в школу. На сколько минут раньше они приехали в школу в тот день?

Решение. *Способ 1.* Наташа вышла из дома, когда Виталий был в десяти минутах езды от ее дома, т. е. в $\frac{10}{25}$ всего пути от ее дома. Ребята двигались навстречу друг другу. Наташа за минуту проходила $\frac{1}{100}$ пути (поясните почему), а Виталий — $\frac{1}{25}$ пути, значит, $\frac{10}{25}$ пути они преодолели за

$$\frac{10}{25} : \left(\frac{1}{100} + \frac{1}{25}\right) = 8 \text{ (мин)}.$$

За 8 мин Наташа прошла часть пути от дома до школы, значит, в этот день Виталию не пришлось ехать эти $\frac{8}{100}$ пути от места встречи до дома Наташи и обратно. Таким образом, Виталий сэкономил $\frac{16}{100} : \frac{1}{25}$ (мин), т. е. 4 мин.

Ответ: 4 мин.



Способ 2. Пусть путь от дома до школы — a км. Скорость мотоциклиста $\frac{a}{25} \frac{\text{км}}{\text{мин}}$, а скорость Наташи $\frac{a}{100} \frac{\text{км}}{\text{мин}}$. В момент выхода Наташи из дома Виталий был от нее в десяти минутах езды, т. е. на расстоянии $\left(\frac{a}{25} \cdot 10\right)$ км. Поскольку Наташа и Виталий сближались со скоростью $\left(\frac{a}{100} + \frac{a}{25}\right) \frac{\text{км}}{\text{мин}}$, то встретились они через $\frac{10a}{25} : \left(\frac{a}{100} + \frac{a}{25}\right)$ (мин), т. е. через 8 мин. Далее рассуждения аналогичны первому способу.

Упражнения

52. 1) Два самолета вылетели из двух городов одновременно навстречу друг другу. Один самолет все расстояние может пролететь за 5 ч, а второй — за 8 ч. Через сколько часов самолеты окажутся над одним населенным пунктом?
- 2) Через один кран бассейн наполняется за 20 ч, через другой — за 18 ч. За сколько часов будет наполнен бассейн, если открыть оба крана одновременно?
53. 1) Два автомобиля выехали одновременно навстречу друг другу из двух городов. Первый автомобиль может проехать все расстояние за $3\frac{1}{3}$ ч, а второй — за $2\frac{2}{9}$ ч. Сколько времени будут двигаться автомобили до встречи?
- 2) Два велосипедиста выехали одновременно навстречу друг другу из двух городов. Первый велосипедист может проехать все расстояние за $1\frac{1}{5}$ ч, а второй — за $2\frac{2}{5}$ ч. Сколько времени будут двигаться велосипедисты до встречи?

54. 1) Одна наборщица может набрать рукопись за 12 ч, другая — за 16 ч. Какая часть рукописи останется не набранной, если обе наборщицы будут работать вместе в течение 5 ч?
- 2) К ванне подведены 2 крана. Через один из них ванна может наполниться за 12 мин, через другой — в полтора раза быстрее. За сколько минут наполнится $\frac{5}{6}$ всей ванны, если открыть сразу два крана?
55. 1) Выполняя задание, две швейные бригады вначале некоторое время работали вместе, после чего вторая бригада выполнила оставшуюся часть работы за 5 дней. Сколько дней бригады работали вместе, если первая бригада самостоятельно может выполнить данное задание за 10 дней, а вторая бригада — за 15 дней?
- 2) Первая бригада могла бы убрать весь картофель за 15 ч, а вторая — за 12 ч. После того как они отработали вместе 5 ч, первая бригада была отправлена на другую работу, и закончила уборку вторая бригада. Сколько времени ей понадобилось для этого?
56. 1) Первый автомобиль может перевезти груз за 20 ч, а второй — за 30 ч. К перевозке груза оба автомобиля приступили одновременно и проработали вместе несколько часов, после чего первый автомобиль в одиночку закончил перевозку груза за 5 ч. Сколько часов работал первый автомобиль?
- 2) Бассейн для плавания может наполниться через первую трубу за 5 ч, а через вторую — за 6 ч. Для наполнения бассейна сначала открыли

только первую трубу на 2 ч 15 мин, а затем, не закрывая первую, открыли вторую трубу. Через какое время после этого наполнился бассейн?

57. 1) Улицу убирают две машины. Первая машина может убрать всю улицу за 40 мин, второй для выполнения той же работы надо 75 % этого времени. Уборку начали обе машины одновременно и проработали вместе четверть часа. Затем вторая машина сломалась. Сколько времени потребуется первой машине, чтобы закончить уборку улицы?
- 2) Первая бригада может убрать все поле за 8 дней. Второй бригаде для выполнения той же работы надо 75 % этого времени. Сначала работала первая бригада в течение одного дня. Затем к ней присоединилась вторая, и они вместе закончили работу. Сколько дней работали обе бригады вместе?
58. 1) Первая бригада может выполнить некоторую работу за 12 ч, вторая бригада ту же работу может выполнить в полтора раза быстрее, производительность третьей бригады такая же, как второй. За какое время могут выполнить эту работу три бригады, работая вместе?
- 2) Первая бригада может выполнить некоторую работу за 24 дня, вторая — в полтора раза медленнее, третья — так же, как первая. За сколько дней выполнят эту работу все три бригады, работая вместе?
59. 1) Бассейн для плавания наполняется через две трубы за 6 ч 40 мин. Если обе трубы вместе будут открыты в течение 2 ч 40 мин, а затем первая труба будет закрыта, то для наполнения оставшейся части бассейна через вторую трубу

понадобится 9 ч. За какое время через каждую трубу отдельно можно наполнить весь бассейн?

2) Из пунктов A и B вышли навстречу друг другу два автомобиля. Автомобиль из пункта A вышел на 4 ч 30 мин раньше, чем автомобиль из пункта B . Они встретились через 1 ч 20 мин после выхода автомобиля из пункта B . За какое время каждый автомобиль проходит весь путь от пункта A до пункта B , если скорость автомобиля, вышедшего из пункта A , относится к скорости другого автомобиля как $8 : 7$?

60. 1) Первая наборщица может набрать рукопись за 20 ч, вторая — за 30 ч. Две наборщицы работали вместе 10 ч, затем 3 ч работала только вторая. После этого работу закончила третья наборщица за 1 ч. За какое время может набрать рукопись третья наборщица?

2) На перевозку хлеба завод выделил два автомобиля. Первый автомобиль мог бы перевезти весь хлеб за 16 ч, второй — за 12 ч. Сначала работал в течение 4 ч только первый автомобиль, а затем в течение 2 ч только второй. За какое время перевезут оставшийся хлеб оба автомобиля, работая вместе?

61. 1) Производительности двух тракторов относятся как $2 : 3$. Оба трактора могут вспахать поле за 12 ч. За сколько часов мог бы вспахать это поле каждый трактор, работая отдельно?

2) Две сеялки, работая вместе, засеяли участок земли за 10 ч. Зная, что производительности сеялок относятся как $4 : 5$, определите, за какое время каждая из сеялок, работая в отдельности, могла бы засеять весь участок земли.

62. 1) Два поезда идут в одном направлении из одного города в другой. Второй поезд выходит через 1 ч после первого. Первый поезд расстояние между городами проходит за 5 ч, а второй — за 3 ч. Через сколько часов после выхода первого поезда второй поезд догонит первый? Какую часть пути пройдут оба поезда до места встречи?
- 2) Из города A в город B вышел пассажирский поезд, а спустя 2 ч из города A в город B вышел скорый поезд. Пассажирский поезд проходит расстояние между городами за 16 ч, а скорый — за 10 ч. Определите расстояние между городами A и B , зная, что, когда скорый поезд прибыл на станцию B , пассажирский проходил станцию C , находящуюся на расстоянии 141 км от станции B .
63. 1) Теплоход проходит некоторое расстояние по течению реки за 10 ч, а против течения — за 20 ч. За какое время проплывет это расстояние щепка, брошенная в реку?
- 2) Теплоход, двигаясь равномерно, проходит расстояние между двумя пристанями по течению реки за 12 ч, а против течения — за 15 ч. За какое время проплывет это расстояние плот?
64. 1) Из пунктов A и B вышли одновременно навстречу друг другу два пешехода. Они встретились через 10 ч. Первый пешеход пришел в пункт B через 5 ч после встречи. За какое время второй пешеход может пройти расстояние AB ?
- 2) Две швеи, работая вместе, могут выполнить заказ на пошив рабочей одежды за 6 дней. В начале четвертого дня вторую швею перевели на другую работу, и первая швея закончила работу

за 5 дней. За сколько дней каждая из них, работая отдельно, может выполнить заказ?

65. 1) Теплоход отошел от одной пристани по направлению к другой. Пройдя половину пути, теплоход увеличил скорость на $\frac{1}{4}$ первоначальной и прибыл на пристань назначения на полчаса раньше срока. За какое время теплоход прошел все расстояние между пристанями?
- 2) Поезд вышел в полдень со станции A в сторону станции B . После прохождения половины пути машинист из-за неисправности пути уменьшил скорость на 25 %, и поэтому поезд прибыл на станцию B с опозданием в 10 мин. Укажите время прибытия поезда на станцию B .

4. Задачи на движение

Задача 1. Скорости автомобилей относятся как 4 : 5. Автомобили выходят одновременно навстречу друг другу и встречаются через 3 ч, проехав 486 км. Найдите скорости автомобилей.

Решение. Способ 1. Расстояния, пройденные автомобилями за одно и то же время, прямо пропорциональны их скоростям, т. е. относятся как 4 : 5. Значит, чтобы найти эти расстояния, надо 486 км разделить в отношении 4 : 5.

Первый автомобиль прошел $\frac{486}{4+5} \cdot 4 = 216$ (км).

Второй автомобиль прошел $\frac{486}{4+5} \cdot 5 = 270$ (км). Скорости автомобилей соответственно равны: $216 : 3 = 72 \left(\frac{\text{км}}{\text{ч}} \right)$ и $270 : 3 = 90 \left(\frac{\text{км}}{\text{ч}} \right)$.

Ответ: $72 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$, $90 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$.



Способ 2. Пусть $4x \frac{\text{км}}{\text{ч}}$ — скорость первого автомобиля, а $5x \frac{\text{км}}{\text{ч}}$ — скорость второго автомобиля. Поскольку за 3 ч оба автомобиля, двигаясь навстречу друг другу, преодолели 486 км, то получим уравнение $(4x + 5x)3 = 486$.

Решив это уравнение, найдем $x = 18$. Скорости автомобилей: $4 \cdot 18 = 72 \left(\frac{\text{км}}{\text{ч}} \right)$ и $5 \cdot 18 = 90 \left(\frac{\text{км}}{\text{ч}} \right)$.

Задача 2. Из A в B вышла группа туристов со скоростью $6 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$, одновременно из B в A выехал на мопеде почтальон со скоростью $16 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$. Приехав в A , почтальон через 45 мин отправился в B и догнал туристов в 10 км от B . Найдите расстояние от A до B .

Решение. Пусть $AB = x$ км, тогда туристы, до того как их догнал почтальон, прошли $(x - 10)$ км за $\frac{x - 10}{6}$ ч. За это время почтальон успел проехать расстояние $(x + x - 10)$ км на мопеде и пробыть $\frac{3}{4}$ ч в A . На все было затрачено $\left(\frac{2x - 10}{16} + \frac{3}{4} \right)$ ч.

По условию имеем уравнение $\frac{x - 10}{6} = \frac{2x - 10}{16} + \frac{3}{4}$. Умножив обе части этого уравнения на 48, получим: $8x - 80 = 6x - 30 + 36$, откуда найдем $x = 43$.

Ответ: 43 км.

Задача 3. Две точки движутся с постоянными скоростями по окружности длиной 60 м. Когда точки движутся в одном направлении, то одна точка обгоняет другую через каждые 20 с, а когда они движутся в разных направлениях, то встречаются через каждые 12 с. Найдите скорости точек.

Решение. Скорость сближения точек равна $60 : 12 = 5 \left(\frac{\text{м}}{\text{с}} \right)$. Пусть скорость движения одной точки $x \frac{\text{м}}{\text{с}}$, тогда скорость другой точки $(5 - x) \frac{\text{м}}{\text{с}}$ и $x \frac{\text{м}}{\text{с}}$ — большая из скоростей. При движении в одном направлении за 20 с (между встречами при обгонах) точки пройдут соответственно $20x$ м и $20(5 - x)$ м, причем точка, движущаяся быстрее, пройдет на целый круг, т. е. на 60 м, больше. Следовательно, получаем уравнение $20x - 20(5 - x) = 60$, откуда находим $x = 4$.

Значит, $4 \frac{\text{м}}{\text{с}}$ — скорость одной точки, а $1 \frac{\text{м}}{\text{с}}$ — скорость другой.

Ответ: $4 \frac{\text{м}}{\text{с}}$, $1 \frac{\text{м}}{\text{с}}$.

Задача 4. На испытаниях радиоуправляемых моделей автомобилей Мишин и Колин автомобили двигались навстречу друг другу из одной точки беговой дорожки школьного стадиона. После встречи одна из моделей прибыла в точку старта за 4 с, а другая — за 16 с. Найдите скорости автомобилей Коли и Миши, если длина беговой дорожки 108 м и известно, что Колин автомобиль двигался быстрее.

Решение. Пусть автомобили мальчиков от точки старта A до точки встречи B (рис. 65) двигались x с: Мишина машина двигалась по дуге AMB , а Ко-

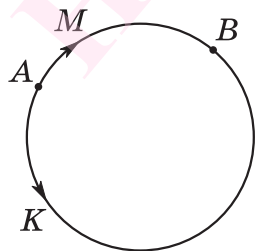


Рис. 65

лина — по большей дуге AKB , поскольку скорость Колиной модели больше. Соответственно путь по дуге BMA Колин автомобиль пройдет за 4 с, а Мишин — по дуге BKA — за 16 с. Поскольку скорости моделей постоянны, то отношение времени, затраченного Ми-

шинным автомобилем на преодоление путей AMB и BKA , будет таким же, как отношение времени, затраченного Колиной моделью на прохождение этих же участков, т. е. $x : 16 = 4 : x$. Из этой пропорции найдем $x = 8$ (значение $x = -8$ не рассматриваем, так как x в задаче обозначает время движения до встречи).

Итак, Мишин автомобиль пройдет круг за $8 + 16$, т. е. за 24 с, значит, его скорость равна $108 : 24$, т. е. $4,5 \frac{\text{м}}{\text{с}}$. Соответственно Колина модель пройдет круг за 12 с, т. е. ее скорость равна $9 \frac{\text{м}}{\text{с}}$.

Ответ: $4,5 \frac{\text{м}}{\text{с}}$, $9 \frac{\text{м}}{\text{с}}$.

Задача 5. Скорость течения реки $3 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$. Собственная скорость катера $12 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$. На какое расстояние можно отплыть на катере от пристани, чтобы, нигде не задерживаясь, вернуться назад через 3 ч 12 мин?

Решение. Пусть искомое расстояние равно x км, тогда на путь, пройденный по течению, понадобится $\frac{x}{12+3}$ ч, а на путь, пройденный против течения, понадобится $\frac{x}{12-3}$ ч. Всего понадобится $\left(\frac{x}{15} + \frac{x}{9}\right)$ ч, что по условию равно $3\frac{12}{60}$ ч, поэтому получаем уравнение $\frac{x}{15} + \frac{x}{9} = \frac{16}{5}$. Умножив обе части этого уравнения на 45, получим уравнение, равносильное исходному: $3x + 5x = 16 \cdot 9$. Отсюда $x = 18$.

Ответ: 18 км.

Задача 6. Катя и Вася стоят на разных краях платформы, длина которой 300 м. Мимо Кати поезд длиной 750 м прошел за 50 с. Через сколько секунд

поезд пройдет мимо Васи? За какое время поезд минует платформу?

Решение. Скорость движения поезда равна $\frac{750}{50} \frac{\text{м}}{\text{с}}$, т. е. $15 \frac{\text{м}}{\text{с}}$. Мимо Васи, стоящего в точке B_2 (рис. 66), поезд начнет движение после того, как «голова» поезда проедет платформу длиной 300 м, значит, через $\frac{300}{15}$ с, т. е. через 20 с. Платформу поезд минует спустя еще 50 с, т. е. всего за 70 с.

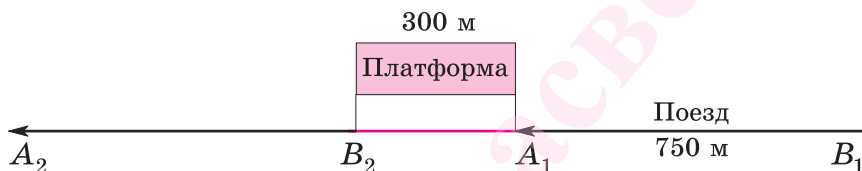


Рис. 66

Ответ: 20 с, 1 мин 10 с.

Задача 7. На военных учениях колонна проехала по мосту длиной 700 м за 4 мин, а мимо часового — за 3 мин. Какова длина колонны?

Решение. *Способ 1.* Пока часового, стоящий, например, в точке A_1 (рис. 67), дождался «хвоста» колонны, прошло 3 мин, значит, «хвост» колонны проехал мост за 1 мин. Таким образом, скорость движения колонны $700 \frac{\text{м}}{\text{мин}}$. Поскольку за 3 мин перед часовым с этой скоростью прошла вся колонна, то ее длина $(700 \cdot 3)$ м, т. е. 2,1 км.

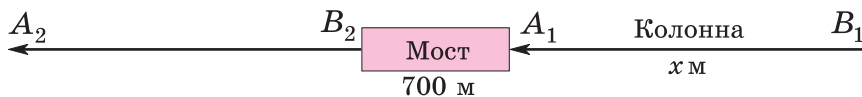


Рис. 67

Ответ: 2,1 км.



Способ 2. Пусть x м — длина колонны. Поскольку мимо часового, находящегося, например, в точке A_1 (см. рис. 67), колонна прошла за 3 мин, то скорость ее движения равна $\frac{x}{3} \frac{\text{м}}{\text{мин}}$.

Мост считается пройденным, когда его покинет «хвост» колонны, т. е. из точки A_1 (начало движения по мосту) «хвост» передвинется в точку B_2 (конец движения колонны по мосту). Путь B_1B_2 равен $(700 + x)$ м и пройден за 4 мин, значит, скорость движения колонны равна $\frac{700 + x}{4} \frac{\text{м}}{\text{мин}}$.

Составим уравнение:

$$\frac{700 + x}{4} = \frac{x}{3}.$$

Решив его, получим $x = 2100$ м, т. е. 2,1 км.

Упражнения

66. 1) Путешественник 6 ч проехал на автомобиле, 15 ч — на поезде и 7 ч плыл на теплоходе. Скорость автомобиля в 2 раза больше скорости поезда и в 4 раза больше скорости теплохода. Определите путь, пройденный каждым видом транспорта, если весь маршрут составил 1220 км.
- 2) Три туриста прошли вместе 1992 км. Первый был в пути 12 дней, второй — 18, третий — 30. Первый за 4 дня прошел столько, сколько второй — за 5 дней, а третий прошел за 6 дней столько, сколько второй — за 10 дней. Сколько километров прошел каждый турист?
67. 1) Турист Петя прошел $\frac{5}{24}$ всего пути, после этого ему осталось пройти 76 км. Найдите весь путь.

- 2) Турист Лёня был в пути два дня. В первый день он прошёл на 24 км больше, чем во второй. Расстояние, пройденное Лёней во второй день, составляет $\frac{5}{13}$ расстояния, пройденного в первый день. Какое расстояние было пройдено в первый день? Во второй день?
68. 1) Два пешехода выходят одновременно из пунктов A и B навстречу друг другу. Скорость одного пешехода $4 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$, а скорость другого — $5 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$. На какое расстояние они сближаются каждый час?
2) Два пешехода выходят одновременно из пункта A и направляются в пункт B . Скорость одного пешехода $4 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$, а скорость другого — $6 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$. Какое расстояние будет между пешеходами через 1 ч? 2 ч? 6 ч?
69. 1) Два велосипедиста выехали одновременно навстречу друг другу из деревень Струсто и Пантелейки, расстояние между которыми 11,5 км, а через 30 мин встретились. Найдите скорость каждого из них, если один ехал на $1 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$ быстрее другого.
2) Два велосипедиста отправляются одновременно из поселков Слобода и Переседы навстречу друг другу и через 2 ч встречаются. Расстояние между поселками равно 42 км. Найдите скорость каждого из велосипедистов, если один из них проезжает в час на 3 км меньше другого.
70. 1) Расстояние между двумя пешеходами, движущимися равномерно в одном направлении,

равно $2\frac{1}{2}$ км. Первый пешеход проходит 8 км за 2 ч, а второй — 1 км за 12 мин. Через какое время второй пешеход догонит первого?

2) Скорый поезд проходит $302\frac{1}{2}$ км за 5 ч, а товарный — 2,7 км за 4 мин. Через два часа после выхода товарного поезда в том же направлении отправляется скорый поезд. Через какое время скорый поезд догонит товарный?

71. 1) Известно, что $\frac{7}{11}$ расстояния между станциями Негорелое и Городея равно 56 км. Из Негорелого в Городею вышел электропоезд, а через 12 мин навстречу ему из Городеи вышел другой электропоезд, скорость которого на $5 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$ больше скорости первого. Электропоезда встретились через 24 мин после выхода второго. Найдите их скорости.
- 2) Из A в B выехал велосипедист со скоростью $12,4 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$. Спустя 1 ч 15 мин из B навстречу ему выехал второй велосипедист со скоростью $11,2 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$. Через какое время после выезда первого велосипедиста и на каком расстоянии от A встретятся велосипедисты, если $\frac{15}{49}$ расстояния AB равно 21 км?

72. 1) Расстояние между двумя городами электропоезд проходит за 20 ч, а тепловоз — за 40 ч. Когда тепловоз прошел $\frac{1}{3}$ пути, следом вышел электропоезд. Через какое время он догонит тепловоз?

- 2) С двух станций выходят одновременно навстречу друг другу два поезда. Первый проходит это расстояние за $12\frac{1}{2}$ ч, а второй — за $18\frac{3}{4}$ ч. Через какое время после отправления поезда встретятся?
73. 1) Из пунктов *A* и *B*, расстояние между которыми 8400 км, одновременно навстречу друг другу вылетели два самолета. Их скорости относятся как 3 : 4. Найдите эти скорости, если через 6 ч самолеты прибыли в аэропорт *C*.
- 2) Из двух городов, расстояние между которыми 960 км, одновременно навстречу друг другу вышли два поезда. Скорости поездов относятся как 3 : 2. Найдите скорости поездов, если они встретились через 12 ч.
74. 1) Катер шел против течения 3,5 ч, а по течению — 1,3 ч. Найдите собственную скорость катера, если он прошел 63,2 км, а скорость течения реки $4\frac{\text{км}}{\text{ч}}$.
- 2) Скорость моторной лодки в стоячей воде $12\frac{\text{км}}{\text{ч}}$, по течению она плыла 2,6 ч, против течения — $3\frac{2}{15}$ ч. Найдите скорость течения реки, если по течению лодка прошла на 10,8 км больше, чем против течения.
75. 1) Автомобиль в течение 6 ч ехал со скоростью $40\frac{\text{км}}{\text{ч}}$ и 4 ч — со скоростью $60\frac{\text{км}}{\text{ч}}$. Найдите среднюю скорость движения автомобиля.
- 2) Лыжники на первом участке пути в течение 7 ч шли со скоростью $8\frac{\text{км}}{\text{ч}}$ и на втором участ-

ке — в течение 3 ч со скоростью $7 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$. Найдите среднюю скорость движения лыжников.

76. 1) Первую половину пути велосипедист ехал со скоростью $18 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$, а вторую — со скоростью $12 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$. Какова средняя скорость велосипедиста?
2) Скорость теплохода по течению реки $24 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$, а против течения — $16 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$. Какова средняя скорость теплохода при его движении от пристани А до пристани В и обратно?
77. 1) Две точки движутся с постоянными скоростями по окружности длиной 120 м. Когда точки движутся в одном направлении, то одна обгоняет другую через каждые 40 с, а когда они движутся в разных направлениях, то встречаются через каждые 24 с. Найдите скорости точек.
2) Две точки движутся с постоянными скоростями по окружности длиной 270 м. Когда точки движутся в одном направлении, то одна обгоняет другую через каждые 45 с, а когда они движутся в разных направлениях, то встречаются через каждые 27 с. Найдите скорости точек.
78. 1) Лёня и его папа побежали навстречу друг другу из одной точки беговой дорожки стадиона. После встречи один из них прибежал в точку старта за 3 с, а другой — за 27 с. Найдите скорости Лёни и его папы, если длина беговой дорожки 180 м.

2) Лена со своей младшей сестрой Галей бежали навстречу друг другу из одной точки беговой дорожки по кругу. После встречи одна из них прибежала в точку старта за 4 с, а другая — за 9 с. Найдите скорости девочек, если длина беговой дорожки 60 м.

79. 1) Два спортсмена стартовали из одной точки беговой дорожки стадиона одновременно в одном направлении. Скорость одного из них в 2 раза меньше скорости другого. В тот момент, когда они оба вновь были на линии старта, оказалось, что спортсмен, бежавший медленнее, пробежал 7 кругов. Сколько раз к этому моменту его обогнал другой спортсмен?

2) Велосипедист и мотоциклист стартовали одновременно из одной точки кольцевого шоссе в противоположных направлениях. Скорость мотоциклиста в 3 раза превосходила скорость велосипедиста. В тот момент, когда они вновь оказались вместе на линии старта, мотоциклист сделал 24 круга. Сколько раз к этому моменту они встречались во время движения?

80. 1) Из одной точки цирковой арены в одном направлении побежали лошадь и пони. Скорость лошади в 3 раза превосходит скорость пони. Сколько раз лошадь догоняла пони к тому моменту, когда они вновь вместе оказались в точке старта?

2) Из одной точки цирковой арены в противоположных направлениях побежали лошадь и пони. Скорость лошади в 2 раза превосходит скорость пони. Сколько раз они встретились к

тому моменту, когда вместе остановились на линии старта?

81. 1) Два бегуна стартовали из одной точки беговой дорожки стадиона в одном направлении. Когда они вновь оказались в точке старта, один из них пробежал 8 кругов, а другой — 6. Сколько раз при этом один из них догонял другого?

2) Два бегуна стартовали из одной точки беговой дорожки стадиона в противоположных направлениях. Когда они вновь встретились на линии старта, оказалось, что один из них пробежал 8 кругов, а другой — 6. Сколько раз они встретились к тому моменту, когда вместе остановились, встретившись на старте?

82. 1) Группа детей, построенных в цепочку по одному и держащихся за веревочку длиной 6 м, перешла проспект по пешеходному переходу за 40 с, а мимо постового милиционера она прошла за 10 с. Определите ширину проезжей части проспекта.

2) Пятнадцатиметровая колонна суворовцев прошла центральную аллею городского парка за 2 мин, а мимо пенсионера, отдыхавшего на лавочке, за 10 с. Найдите длину центральной аллеи парка.

▲ 5. Применение уравнений при решении задач

Задача 1. Когда брату было столько лет, сколько сейчас сестре, им вместе было 15 лет; когда сестре будет столько лет, сколько сейчас брату, им вместе будет 27 лет. Найти возраст брата и возраст сестры.

Решение. *Способ 1.* Пусть сестре сейчас y лет. Значит, когда брату было y лет, им вместе было 15 лет, и следовательно, сестре было $(15 - y)$ лет. Назовем этот год начальным.

Каждый год сумма их возрастов увеличивается на 2 года, поэтому 27 лет им (в сумме) будет через $(27 - 15) : 2 = 6$ (лет) после начального года. Но через 6 лет возраст сестры будет $(15 - y) + 6$, т. е. $(21 - y)$ лет. Значит, сейчас брату $(21 - y)$ лет.

Поскольку сейчас сестре y лет, то сейчас брат старше сестры на $(21 - y) - y$ лет; а в начальном году он был старше сестры на $y - (15 - y)$ лет. Разница между их возрастами не изменяется, поэтому получим уравнение

$$(21 - y) - y = y - (15 - y).$$

Решив это уравнение, получим

$$y = 9.$$

Так как брат старше сестры на $21 - 2y$, т. е. на $21 - 18 = 3$ (года), то брату сейчас 12 лет.

Ответ: сестре 9 лет, брату 12 лет.

Заметим, что необязательно при решении задачи обозначать буквой значение той величины, которую нужно найти по условию задачи.

Покажем, как можно решить эту задачу, обозначив буквой разницу между возрастами брата и сестры.



Способ 2. Пусть сестра младше брата на x лет, значит, x лет тому назад брату было столько же лет, сколько сейчас сестре, и сумма их возрастов была 15 лет. Поскольку через x лет возраст каждого стал больше на x лет, то сейчас сумма возрастов брата и сестры равна $(15 + 2x)$ лет.

Чтобы сестре стало столько лет, сколько сейчас брату, должно пройти x лет, и тогда сумма их возрастов будет 27. Значит, сейчас сумма возрастов брата и сестры равна $(27 - 2x)$ лет.

Составим уравнение:

$$15 + 2x = 27 - 2x.$$

Решив это уравнение, получим $x = 3$.

Итак, сестра младше брата на 3 года, сумма их возрастов 21 год. Если бы брату было столько лет, сколько сестре, то вместе им было бы $21 - 3$, т. е. 18 лет, значит, сестре 9 лет, а брату на 3 года больше, т. е. 12 лет.



Способ 3. Пусть брат старше сестры на x лет. Тогда по условию задачи в прошлом возраст брата был $\frac{15 + x}{2}$ лет. Он совпадает с возрастом сестры сейчас. А в будущем возраст сестры, равный $\frac{27 - x}{2}$ лет, совпадает с возрастом брата сейчас. Получаем уравнение:

$$\frac{27 - x}{2} - \frac{15 + x}{2} = x.$$

Откуда $x = 3$. Следовательно, брату $\frac{27 - 3}{2} = 12$ (лет), а сестре $12 - 3 = 9$ (лет).

Задача 2. На нумерацию страниц книги понадобилось в два раза больше цифр, чем было страниц. Сколько страниц в книге?

Решение. Способ 1. На первые 9 страниц понадобится 9 цифр. Если в книге меньше 100 страниц, то, начиная с десятой страницы, номера страниц — двузначные числа. Пусть в книге $(x + 9)$ страниц,

тогда для нумерации понадобится $(2x + 9)$ цифр. Однако по условию задачи для нумерации требуется $2(x + 9)$ цифр. Составим уравнение:

$$2x + 9 = 2x + 18.$$

Это уравнение не имеет решений, значит, в книге больше 99 страниц.

Если в книге меньше 1000 страниц, то, начиная с сотой страницы, номера страниц трехзначные. Пусть в книге $(99 + y)$ страниц, тогда для нумерации страниц понадобится $(9 + 2 \cdot 90 + 3y)$ цифр. А по условию задачи требуемое для нумерации число цифр $2(y + 99)$. Составим уравнение:

$$3y + 180 + 9 = 2y + 198.$$

Решив это уравнение, получим $y = 9$.

Итак, в книге $(99 + 9)$ страниц, т. е. 108 страниц. Убедитесь, что если число страниц в книге больше 999, то число цифр, необходимых для их нумерации, превосходит число страниц более чем в 2 раза. Таким образом, других решений нет.

Ответ: 108 страниц.



Способ 2. Очевидно, что если брать для нумерации страниц только однозначные и двузначные числа, то количество цифр не может вдвое превосходить количество чисел.

От 10 до 99 — количество цифр вдвое превосходит количество чисел. От 1 до 9 недостает 9 цифр, значит, нужно использовать еще 9 трехзначных чисел (от 100 до 108). Таким образом, в книге 108 страниц.

Задача 3. В двузначном числе цифра десятков на 4 больше цифры единиц. Когда это число разделили на цифру единиц, то в частном получилось 24,

а в остатке число, которое на 2 меньше делителя. Найти заданное число.

Решение. Пусть в заданном числе x — цифра десятков, тогда $x - 4$ — цифра единиц, т. е. заданное число равно $10x + x - 4$. По условию, если заданное число разделить на $x - 4$, то получится 24 и еще $x - 6$ в остатке. Следовательно, заданное число равно $24(x - 4) + x - 6$. Таким образом, получим уравнение

$$10x + x - 4 = 24(x - 4) + x - 6.$$

Решив это уравнение, найдем

$$x = 7.$$

Цифра единиц равна $x - 4$, т. е. 3. Значит, заданное число равно 73.

Ответ: 73.

Замечание. Решая эту задачу, можно использовать обозначение десятичной записи числа. Например, четырехзначное число с цифрами a , b , c и d можно обозначить $\overline{abcd}$, — эта запись означает $a \cdot 1000 + b \cdot 100 + c \cdot 10 + d \cdot 1$.

В задаче 3 заданное число можно обозначить $\overline{x(x-4)}$. В соответствии с этим обозначением можно записать $\overline{x(x-4)} = 10x + x - 4$, а по условию задачи имеем $\overline{x(x-4)} = 24(x-4) + x - 6$. Дальнейшее решение уже рассмотрено.

Упражнения

83. 1) Сыну 16 лет, а матери 40 лет. Через сколько лет мать будет в два раза старше сына?
2) Отцу 50 лет, а дочери 28 лет. Сколько лет назад дочь была в 2 раза моложе отца?

84. 1) Матери было 28 лет, когда у нее родился сын. Сколько лет было матери и сколько сыну в 2012 г., если в 2006 г. сын был моложе матери в 5 раз?
2) Сестра моложе брата на 9 лет. Сколько лет было сестре и сколько брату в 2012 г., если в 2004 г. брат был старше сестры в 4 раза?
85. 1) Когда Даше было столько лет, сколько Мише сейчас, им вместе было 14 лет, когда Мише будет столько лет, сколько сейчас Даше, им вместе будет 46 лет. Найдите возраст Миши и возраст Даши.
2) Когда Сапе было столько лет, сколько Рите сейчас, им вместе было 18 лет, когда Рите будет столько лет, сколько сейчас Сапе, им вместе будет 42 года. Найдите возраст Риты и возраст Саши.
86. 1) Сколько требуется цифр для нумерации страниц книжки, в которой 75 страниц?
2) Сколько требуется цифр для нумерации страниц учебника, в котором 332 страницы?
87. 1) Для нумерации страниц учебника потребовалось 411 цифр. Сколько страниц в учебнике?
2) Сколько страниц в книге, если известно, что для их нумерации потребовалось 187 цифр?
88. 1) Ученик пронумеровал страницы своей тетради. Для этого он решил писать только нечетные номера страниц, ставя числа 1, 3, 5 и т. д. Всего он написал 104 цифры. Сколько всего страниц в тетради и сколько раз ученик написал цифру 7?
2) Студент Вася пронумеровал страницы своей тетради. Для этого он решил писать только

четные номера страниц, ставя числа 2, 4, 6 и т. д. Всего он написал 247 цифр. Сколько всего страниц в тетради и сколько раз Вася написал цифру 6?

89. 1) Сколько страниц в книге, если их на 160 меньше, чем требуется цифр для их нумерации?
2) Если число цифр, понадобившихся для нумерации страниц книги, разделить на число страниц, то в частном получится 2 и 127 в остатке. Сколько страниц в книге?
90. 1) Найдите число, при делении которого на 3 в частном получается число на 17 меньше самого числа, а в остатке — число меньше частного в 8 раз.
2) Одно число больше другого на 406. Если большее число разделить на меньшее, то в частном получится 3, а в остатке 66. Найдите эти числа.
91. 1) Найдите три последовательных натуральных числа, если их сумма равна 423.
2) Найдите четыре последовательных натуральных числа, если их сумма равна 366.
92. 1) Сумма трех последовательных четных чисел, кратных 3, равна 270. Найдите эти числа.
2) Сумма трех последовательных нечетных чисел, кратных 3, равна 657. Найдите эти числа.
93. 1) Найдите наименьшее натуральное число, которое при умножении на 2 будет квадратом, а при умножении на 3 — кубом целого числа.
2) Найдите наименьшее натуральное число, которое при умножении на 2 будет кубом, а при умножении на 3 — квадратом целого числа.

94. 1) Сумма цифр двузначного числа 14. Если цифры переставить, то вновь полученное число будет меньше исходного на 18. Найдите первоначальное число.
- 2) Цифра единиц двузначного числа вдвое больше цифры его десятков. Если цифры переставить, то вновь полученное число будет больше первоначального на 27. Найдите первоначальное число.
95. 1) Цифра десятков двузначного числа втрое больше цифры его единиц. Если из этого числа вычесть учетверенную сумму его цифр, то получится число на 32 меньше исходного. Найдите это число.
- 2) В двузначном числе цифра десятков на 4 больше цифры единиц. Если из этого числа вычесть 28, то полученное число составит $\frac{2}{3}$ исходного. Найдите это число.
96. 1) Сумма двух чисел равна 499. Если к одному из чисел приписать справа цифру 4, то получится второе число. Найдите эти числа.
- 2) Найдите двузначное число, которое уменьшится в 14 раз, если зачеркнуть цифру единиц.
97. 1) Среднее арифметическое двух чисел равно 0,32. Одно из чисел равно 0,25. Найдите второе число.
- 2) Среднее арифметическое трех чисел равно 8,6. Одно из чисел равно 9,1, второе 8,3. Найдите третье число.
98. 1) В двузначном числе цифра десятков на 3 больше цифры единиц. Если это число умножить на 5,

а к произведению прибавить 26, то получится число, которое в 99 раз больше цифры единиц исходного числа. Найдите исходное число.

2) Сумма цифр двузначного числа равна 11. Если цифру десятков уменьшить на 3, а цифру единиц увеличить на 3, то получится число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Найдите исходное число.

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

Полезно помнить

$$4 \cdot 25 = 100$$

$$3 \cdot 37 = 111$$

$$8 \cdot 125 = 1000$$

$$\frac{1}{8} = 0,125 = 0,5^3 = 2^{-3}$$

$$\frac{1}{4} = 0,25 = 0,5^2 = 2^{-2}$$

$$\frac{1}{2} = 0,5 = 2^{-1}$$

Единицы длины

$$1 \text{ км} = 1000 \text{ м} = 10^3 \text{ м}$$

$$1 \text{ м} = 10 \text{ дм} = 100 \text{ см} = 10^2 \text{ см}$$

$$1 \text{ см} = 10 \text{ мм}$$

$$1 \text{ м} = \frac{1}{1000} \text{ км} = 10^{-3} \text{ км}$$

$$1 \text{ см} = \frac{1}{100} \text{ м} = 10^{-2} \text{ м} = 10^{-1} \text{ дм}$$

$$1 \text{ мм} = \frac{1}{10} \text{ см} = 10^{-1} \text{ см}$$

Единицы площади

$$1 \text{ км}^2 = 1\,000\,000 \text{ м}^2 = 10^6 \text{ м}^2$$

$$1 \text{ м}^2 = 100 \text{ дм}^2 = 10\,000 \text{ см}^2 = 10^4 \text{ см}^2$$

$$1 \text{ га} = 100 \text{ а} = 10\,000 \text{ м}^2 = 10^4 \text{ м}^2$$

$$1 \text{ а} = 100 \text{ м}^2 = 10^2 \text{ м}^2$$

$$1 \text{ м}^2 = \frac{1}{1000000} \text{ км}^2 = 10^{-6} \text{ км}^2$$

$$1 \text{ см}^2 = \frac{1}{10000} \text{ м}^2 = 10^{-4} \text{ м}^2 = 10^{-2} \text{ дм}^2$$

$$1 \text{ м}^2 = \frac{1}{10000} \text{ га} = 10^{-4} \text{ га}$$

$$1 \text{ м}^2 = \frac{1}{100} \text{ а} = 10^{-2} \text{ а}$$

Единицы объема

$$1 \text{ м}^3 = 1000 \text{ дм}^3 = 10^3 \text{ дм}^3$$

$$1 \text{ м}^3 = 1\,000\,000 \text{ см}^3 = 10^6 \text{ см}^3$$

$$1 \text{ дм}^3 = 1 \text{ л} = 1000 \text{ см}^3 = 10^3 \text{ см}^3$$

$$1 \text{ см}^3 = 1 \text{ мл} = 1000 \text{ мм}^3 = 10^3 \text{ мм}^3$$

$$1 \text{ дм}^3 = 1 \text{ л} = \frac{1}{1000} \text{ м}^3 = 10^{-3} \text{ м}^3$$

$$1 \text{ см}^3 = \frac{1}{1000000} \text{ м}^3 = 10^{-6} \text{ м}^3$$

$$1 \text{ см}^3 = 1 \text{ мл} = \frac{1}{1000} \text{ л} = 10^{-3} \text{ л}$$

$$1 \text{ мм}^3 = \frac{1}{1000} \text{ мл} = \frac{1}{1000} \text{ см}^3 = 10^{-3} \text{ см}^3$$

Единицы массы

$$1 \text{ т} = 1000 \text{ кг} = 10^3 \text{ кг}$$

$$1 \text{ ц} = 100 \text{ кг} = 10^2 \text{ кг}$$

$$1 \text{ кг} = 1000 \text{ г} = 10^3 \text{ г}$$

$$1 \text{ г} = 1000 \text{ мг} = 10^3 \text{ мг}$$

$$1 \text{ кг} = \frac{1}{1000} \text{ т} = 10^{-3} \text{ т}$$

$$1 \text{ кг} = \frac{1}{100} \text{ ц} = 10^{-2} \text{ ц}$$

$$1 \text{ г} = \frac{1}{1000} \text{ кг} = 10^{-3} \text{ кг}$$

$$1 \text{ мг} = \frac{1}{1000} \text{ г} = 10^{-3} \text{ г}$$

Стандартный вид числа

$$u = a \cdot 10^n,$$

где $1 \leq a < 10$,

n — целое число (n — порядок числа u).

Пример перехода от одних единиц измерения к другим

$$\begin{aligned}
 15 \text{ мГ} &= 1,5 \cdot 10 \text{ мГ} = 1,5 \cdot 10 \cdot 1 \text{ мГ} = 1,5 \cdot 10 \cdot 10^{-3} \text{ г} = \\
 &= 1,5 \cdot 10^{-2} \cdot 1 \text{ г} = 1,5 \cdot 10^{-2} \cdot 10^{-3} \text{ кг} = \\
 &= 1,5 \cdot 10^{-5} \cdot 1 \text{ кг} = 1,5 \cdot 10^{-5} \cdot 10^{-2} \text{ ц} = \\
 &= 1,5 \cdot 10^{-7} \cdot 1 \text{ ц} = 1,5 \cdot 10^{-7} \cdot 10^{-1} \text{ т} = 1,5 \cdot 10^{-8} \text{ т}
 \end{aligned}$$

Модуль числа a

$$|a| = a, \text{ если } a \geq 0 \text{ и } |a| = -a, \text{ если } a < 0$$

Квадраты чисел, оканчивающихся на 5

$$\begin{array}{ll}
 75^2 = 5625 & (7(7 + 1) = 56 \text{ и } 5^2 = 25) \\
 85^2 = 7225 & (8(8 + 1) = 72 \text{ и } 5^2 = 25) \\
 115^2 = 13\ 225 & (11 \cdot 12 = 132 \text{ и } 5^2 = 25)
 \end{array}$$

Проценты

$$1 \% = \frac{1}{100} = 0,01$$

Если $p \%$ числа x равно a , то:

$$a = x \cdot p \%$$

$$x = a : p \%$$

$$20 \% = \frac{20}{100} = \frac{1}{5} = 0,2$$

$$25 \% = \frac{25}{100} = \frac{1}{4} = 0,25$$

$$50 \% = \frac{50}{100} = \frac{1}{2} = 0,5$$

$$75 \% = \frac{75}{100} = \frac{3}{4} = 0,75$$

$$80 \% = \frac{80}{100} = \frac{4}{5} = 0,8$$

$$100 \% = \frac{100}{100} = 1$$

Пропорция

$\frac{a}{b}$ — отношение чисел a и b

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ — пропорция (равенство двух отношений)

$a : b = c : d$ — пропорция

Основное свойство пропорции

Если $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ (или $a : b = c : d$), то $a \cdot d = b \cdot c$

(произведение крайних членов пропорции равно произведению ее средних членов).

ОТВЕТЫ

Глава 1

- 1.1. 1) 6,25; 3) $-10\frac{7}{12}$; 5) 6,4; 7) 11,4; 9) $-4\frac{5}{24}$.
- 1.2. 2) -50; 4) $\frac{1}{8}$; 6) 54; 8) -5; 10) -2.
- 1.3. 1) -0,4; 3) 0,04; 5) 1,4.
- 1.4. 2) 1,5; 4) не имеет смысла; 6) не имеет смысла.
- 1.5. 1) Нет; 3) нет; 5) нет.
- 1.6. 2) 50; 4) 0,014.
- 1.7. 1) 24 м; 2) 72 м².
- 1.8. 2) 49; 4) $\frac{10}{29}$; 6) 1.
- 1.9. 1) 1,263; 3) 31,5 м; 5) 90 кг; 7) 3,4 м; 9) 6 кг.
- 1.10. 2) $b - a$; 4) $m : p$; 6) abc ; 8) $b : (a + c)$; 10) $a : (b - c)$.
- 1.11. 1) $a + b$; 3) $(d + c) : k$; 5) $p : abc$; 7) $(m + n) : 2$; 9) $kp : 2$.
- 1.14. 2) -1.
- 1.15. 1) Нет; 3) нет.
- 1.16. $P - a - b$; 2) 1,9 см.
- 1.17. $3(a - b)$; 1) 16,98; 3) -4,25.
- 1.18. 2) 0 — не входит; 4) 4 — не входит; 6) -5 — не входит; 8) -5 и 4 — не входят.
- 1.19. 1) -3 и 3 — не входят; 3) все входят.
- 1.20. 2) -11; -8; -3,5; -2; 1; 10; 4) 4,5; 9; -18; -9; -4,5; -1,8.
- 1.21. 1) $b \neq 0,2$; 3) $m \neq -1,1$, $m \neq 7$; 5) $x \neq 4$, $x \neq 0$, $x \neq -\frac{35}{17}$; 7) $a \neq -5$, $a \neq 5$; 9) $c \neq -3$.
- 1.22. 2) -9,3; 4) -33,3.
- 1.23. 1) 1; 2; 4; 5; 6; 7; 3) -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5.
- 1.24. 2) $x \neq -3$, $x \neq 2$; 4) $x \neq \pm 7$.
- 1.25. 6), 7), 8), 9), 10), 11).
- 1.26. 2) Нет; 4) да; 6) нет; 8) да; 10) да.
- 1.27. 1) Да; 3) да; 5) да; 7) нет; 9) верно, если $m = p = 0$.
- 1.28. 2) $m - n = 2$; 4) $a \cdot \frac{1}{a} = 1$.
- 1.29. Например: 1) $3k + 2p - 14,73 = 7n + q - 14,73$;
3) $0,098(3k + 2p) = 0,098(7n + q)$.

- 1.30. 2) $t + 8 = 0$ или $p - 4 = 0$; 4) $3q + 1 = 0$ или $q - 9 = 0$;
6) $t + 5 = 0$ или $t = 0$ или $2t - 7 = 0$.
- 1.31. 1) Найти невозможно; 3) найти невозможно.
- 1.33. 1), 2), 3), 5), 6), 7).
- 1.34. 1), 4), 7), 8).
- 1.35. 1) а) Да; б) да; в) да.
- 1.36. 2) 6; 4) -80 ; 6) -9 ; 8) -55 .
- 1.37. 1) 1600 ; 3) 2525 .
- 1.38. 2) -54 ; 4) -7 ; 6) 0 ; 8) -1100 ; 10) -1 .
- 1.39. 1) $52\ 400$; 3) 38 ; 5) 7020 ; 7) $0,05$.
- 1.40. 2) 93 ; 4) 86 ; 6) $2,5$.
- 1.41. 1) $m + (-3k)$; 3) $-5 + (-0,7t)$.
- 1.42. 2) $-1m$; 4) $-1(7n)$; 6) $-1(-3n)$; 8) $-1(-c)$; 10) $-1 \cdot 0$; 12) $-1 \cdot 1,3$.
- 1.43. 1) $0,7$.
- 1.44. 2) $-0,4 + p$; 4) $-b - 3$; 6) $4 - t + 3k + m$; 8) $-c - d + 5k + 3$;
10) $c + d - 5k - 4$.
- 1.45. 1) $c - (-m - n)$; 3) $n + (t - k)$; 5) $-(-a - k) - (c - d)$;
7) $-(m + n) + (c - 2t)$; 9) $(c + k - 5) - (-m + 3)$.
- 1.46. 2) 50 ; 4) 10 ; 6) 4 ; 8) $1\frac{1}{3}$; 10) $0,5$.
- 1.47. 1) $-9m$; 3) $-6b$; 5) -5 .
- 1.48. 2) $(p - 37) - (37 + p) = -74$; 4) $(-t - k) - (t + k) = -2k - 2t$;
6) $(b - a) - (b + a) = -2a$; 8) $(-x - y) - (z - y) = -x - z$;
10) $-k - (a - b + k) = -a + b - 2k$.
- 1.49. 1) $-16x + 19y + 3$; 3) $8,5p + 13$; 5) $-15,5x$; 7) $-8,2b - 7,7m$;
9) $-\frac{9}{32}a$.
- 1.50. 2) $(2x + y) - (x - 2y + 3) + (5x - 4) = 6x + 3y - 7$;
4) $-(2x + y) + (x - 2y + 3) - (5x - 4) = -6x - 3y + 7$;
6) $-(2x + y) - (x - 2y + 3) - (5x - 4) = -8x + y + 1$.
- 1.51. 1) $19,5$; -47 ; $-49,8$.
- 1.52. 2) $b - 37$; 4) $a - 15,8$; 6) $-5,3$.
- 1.53. 1) $-a$; 3) $-y$; 5) $-a + b$; 7) $-y$.
- 1.54. 2) $-n$; 4) m ; 6) $8b + 10p$; 8) $-5x - 21y$.
- 1.55. 1) $18a + 14c + 12$; 3) $-y - z$; 5) $13a - 8b - 5c$;
7) $2k - m - 13t$.
- 1.56. 2) -1 ; 4) 16 ; 6) 7 .

- 1.57. 1) $3\frac{5}{7}$; 3) 2.
- 1.58. 2) 1,125; 4) $\frac{1}{3}$.
- 1.59. 1) 9; 3) 1; 5) 10.
- 1.61. Например: 1) $m = n = 1$, $m = n = 2$, $m = n = 3$; 3) $m = 5$,
 $n = -\frac{1}{5}$; $m = -2$, $n = \frac{1}{2}$; $m = \frac{2}{3}$; $n = -\frac{3}{2}$.
- 1.63. 1) Да; 3) да; 5) нет; 7) нет.
- 1.64. 1), 2), 3), 4).
- 1.65. 1), 2), 3), 4), 6), 7), 8).
- 1.67. -5 ; 5 ; $-a$; a ; $-a - b$; $a + b$.
- 1.68. 2) Да; 4) да.
- 1.69. 1) $m - 3n - 4y$; 3) $m - n + x + y$; 5) $a + n - x + y$;
7) $m - 3n + 4y - 4$.
- 1.70. 2) $5x - (p + 2q) - 7k$; 4) $20a + 4c - (-8p + 3q)$;
6) $-3a + 3b + 9c - (p + 2q)$.
- 1.71. 1) $31y - 43$; 3) $4,4a - 12,1b$; 5) $4x - 1$; 7) $2a + 6$.
- 1.72. 2) $-6m + 23y$; 4) $15x + 15y$; 6) $7m - 16p + 22$; 8) $2ay$.
- 1.77. 1) $m - (-n + y)$; 3) $x + (-m - n)$.
- 1.78. Например: 2) $am + bm - cm = m(a + b - c)$;
4) $ak + am - an + at = a(k + m - n + t)$.
- 1.79. 1) -6 ; 3) $-10,68$; 5) $4\frac{5}{16}$.
- 1.80. 2) $-0,75$; 4) $-0,6$.
- 1.81. 1) $t = 10a + b$; 3) $t = 1000a + 10b + c$.
- 1.82. 2) $m = (2n - 1) + (2n + 1)$, n — целое число;
4) $m = 2n + (2k + 1)$, n и k — целые числа;
6) $m = 8n + 6$, n — целое число.
- 1.83. 1) $y = xp$.
- 1.84. 2) $n = 13k + 10$, k — натуральное число;
4) $n = 2k + 1$, k — натуральное число;
6) $n = 9k$, k — натуральное число;
8) $n = pk$, k — натуральное число.
- 1.85. 1) $(10a + b) = 2(10b + a)$; 3) $((10a + b) - (10b + a)) : 9 = k$,
 k — натуральное число.
- 1.86. 2) $P = 4(6a - 5)$, $S = (6a - 5)^2$.
- 1.87. 1) $S = 6(4b - 1)^2$, $V = (4b - 1)^3$.

Глава 2

- 2.1. 1) Нет; 3) да; 5) да; 7) нет.
 2.2. 2) Да; 4) нет; 6) да; 8) да; 10) нет.
 2.5. 1) а), б), г), д), ж), з), и), к).
 2.6. 2) Нет; 4) да.
 2.7. 1) -2 ; 3) 8 .
 2.8. 2) Да.
 2.9. 1) 2 ; 3) $-4\frac{1}{6}$; 5) 14 .
 2.10. 2) -9 ; 4) 6 .
 2.11. 1) $3,5$; 3) 7 .
 2.12. 2) $-4\frac{9}{14}$; 4) $-8,2$.
 2.13. 1) 5 ; 3) $-3,75$; 5) 3 .
 2.14. 2) $-14,9$.
 2.15. 1) -26 .
 2.16. 2) Нет решений; 4) 1 ; 6) -7 ; 8) $1\frac{5}{51}$; 10) $1\frac{50}{73}$.
 2.17. 1) -8 ; 4) 3 ; 3) -4 ; 6) 5 ; 5) -4 ; -3 ; 9) -9 ; 7) -9 ; 7) 9 .
 2.18. 2) 3 ; 4) $\frac{2}{3}$; 6) $7,2$; 8) 2 .
 2.19. 1) 3 .
 2.20. 2) $-0,5$; 4) $-1\frac{2}{3}$.
 2.21. 1) -15 ; 15 ; 3) 0 ; 5) -11 ; -3 ; 7) 1 ; 2 .
 2.22. 2) Нет решений; 4) x — любое; 6) $3\frac{1}{3}$.
 2.23. 1) 23 ; 3) 27 ; 5) $1,75$; 7) 29 .
 2.24. 2) $0,28$; 4) $2,5$; 6) -4 .
 2.25. 1) $\frac{5}{m-1}$; 2) $\frac{m}{4}$; 3) $\frac{1}{m+4}$, если $m \neq 2$; если $m = 2$, то x — любое; 4) $\frac{m+2}{m-1}$, если $m \neq 1$; нет корней, если $m = 1$.
 2.26. 1) Если $a \geq 0$, то $x = \pm a$, если $a < 0$, то нет решений;
 2) если $a \leq 0$, то $x = \pm a$, если $a > 0$, то нет решений.
 2.27. 1) 22 и 66 ; 2) 78 м и 39 м; 3) 7 дисков; 4) 8 журналов.
 2.28. 1) 80 и 140 ; 2) $123 = 3 + 120$.
 2.29. 1) 94 и 43 ; 2) 29 и 152 ; 3) 45 и 35 ; 4) 34 и 49 .
 2.30. 1) 249 ; 2) 801 .
 2.31. 1) 4 ; 2) 3 .

- 2.32. 1) 3 ч 12 мин; 2) 2 ч; 3) 30 км; 4) 6 км.
- 2.33. 1) 27 туристов, 4 лодки; 2) 31 контейнер, 3 машины.
- 2.34. 1) 400 м; 2) 630 м.
- 2.35. 1) $\frac{5}{9}$; 2) $\frac{7}{8}$.
- 2.36. 1) 195 м^3 ; 2) 3 дм.
- 2.37. 1) 39 000; 26 000; 2) 4 кг; 3) 36 компьютеров; 4) 60 км.
- 2.38. 2) q ; p ; 4) n ; l ; 6) b ; h .
- 2.39. 1) 24; 9; 4; 9; 24; 3) -37 ; -65 ; -101 ; -145 ; -197 ;
5) 52; 6; 2; 4; 48.
- 2.41. 1) Да; 3) да; 5) да; 7) да; 9) да.
- 2.42. Нет.
- 2.43. Коэффициент пропорциональности.
- 2.44. 48 кг; 96 кг; 120 кг; 192 кг; $m = 8l$.
- 2.45. 1) Да; 3) нет.
- 2.46. 2) $y = -3,2x$.
- 2.47. 1) 2; 0,4; 0,08; 0; -1 ; $-1,6$; -2 ; -4 .
- 2.48. 2) $24 + 36$; 4) $27 + 33$.
- 2.49. 1) 54 см; 36 см; 3) 50 см; 40 см.
- 2.50. 168 г, 28 г, 56 г.
- 2.51. 120 г, 16 г, 160 г.
- 2.52. 6 кг вишни, 0,9 кг воды.
- 2.53. 8 кг сахара, 0,4 кг воды.
- 2.54. 2) Нет; 4) да; 6) нет.
- 2.55. 1) C , D , P .
- 2.56. 2) График проходит через точки A , D , E .
- 2.57. Например, $(-6; 5)$, $(12; -10)$.
- 2.59. -400 ; -800 .
- 2.60. 2) 4,5; 3; $-6,3$; -9 .
- 2.61. 1) $0 \leq t \leq 1$; 2) $60 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$.
- 2.62. 1) Скорость Даши $8 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$, скорость Маши $3 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$;
2) $s = 8x$, $s = 3x$.
- 2.63. 1), 3), 4), 5), 6), 7), 8).
- 2.64. 2) Нет.
- 2.65. 1) Да; 3) нет; 5) да; 7) да; 9) нет.

- 2.66. 1) $-20; -14; -8; -2; 4; 10$; 2) $-\frac{1}{3}; 0; \frac{1}{3}; \frac{1}{2}; \frac{5}{6}; \frac{4}{3}$;
3) $\frac{2}{5}$; 4) $\frac{2}{7}$.
- 2.67. 1) $(30; 0)$, $(0; -18)$; 3) $(-4; 0)$, $(0; 6,8)$.
- 2.69. 1) $(4; 0)$, $(0; -2)$; $(-4; 0)$, $(0; 2)$; $(4; 0)$, $(0; 2)$; $(-4; 0)$, $(0; -2)$.
- 2.70. 2) Да; 4) да; 6) нет.
- 2.71. 1) $y = 4x + 3$, $y = 4x - 3$, $y = 4x$; $y = -4x$, $y = -4x - 3$,
 $y = -4x + 3$; $y = -3x - 4$, $y = -3x + 4$; $y = 3x$, $y = 3x + 4$,
 $y = 3x - 4$.
- 2.72. 2) $-13,4$; 4) 0.
- 2.73. Например: 1) $y = 3,6x + 2$; 3) $y = -4,4x + 5$.
- 2.74. 2) $k = 2$, $b = 20$; 4) $k = 2$, $b = -1$.
- 2.76. 2) $y = -4$; 4) $y = 2$.
- 2.77. Например: 1) $y = 2x - 3$; 3) $y = 5x - 7$.
- 2.78. а) $y = 2x + 2$; 6) $y = \frac{2}{3}x - 2$; в) $y = -0,5x + 1$; г) $y = -x - 3$.
- 2.79. 1) -1 .
- 2.80. 2) -13 .
- 2.81. $y = 5x + 22$.
- 2.82. $y = -3x - 13$.
- 2.83. 1) 0; 3) 1; 5) $\frac{7}{13}$.

Глава 3

- 3.1. 1) 5; 0; 3) 9; 0; 5) 0; не определена.
- 3.2. 2) 13; 4) 22; 6) не определена; 8) 3.
- 3.3. 1) a^5 ; 5; 1; 3) x^9 ; 9; 1; 5) $-3c^3d^4$; 7; -3 ; 7) $6a^4b^6n^2$; 12; 6;
9) $-6m^3n^3$; 6; -6 .
- 3.4. 2) $-0,2x^2yz$; 4; $-0,2$; 4) $-\frac{1}{3}x^3y^3$; 6; $-\frac{1}{3}$; 6) $0,1x^2y^2z^2$; 6; 0,1;
8) $0,004a^3b^2$; 5; 0,004; 10) $-14a^3b^5$; 8; -14 .
- 3.5. 1) $-18ac^3k^4p^5t^8$; 21; -18 ; 3) $21a^4bk^5m^2p^5qt^2$; 20; 21.
- 3.6. 2) $k = 0$, степень p не определена; 4) $k = -0,2$; $p = 13$;
6) $k = 1$; $p = 10$.
- 3.7. 1) 54; 3) -64 .
- 3.8. 2) $-\frac{4}{45}$; 4) 0.
- 3.9. 1) $8m^2$; 3) $-6x^3$; 5) $-6a^4b$; 7) $0,2a^3b^4$; 9) $-1,6x^3y^2$.

- 3.10. 2) $18m^3n^4$; 4) $6cm^2n^3$; 6) $-5,6xy^2z$; 8) $5m^3n^3$; 10) $0,27a^3n^2$.
- 3.11. 1) $-2ax^3y^2$; 3) $-\frac{1}{4}x^3m^3n^2$; 5) $-\frac{11}{62}x^3y^4z^2$; 7) 0;
9) $6\frac{12}{49}x^4y^8z^2$.
- 3.12. 2) -7 ; 4) 0.
- 3.13. 1) b^8 ; 3) $-\frac{1}{8}x^3y^3$; 5) $\frac{1}{27}a^{24}c^3$; 7) $\frac{9}{16}a^6b^2c^4$;
9) $-\frac{8}{125}a^{12}b^3t^9$.
- 3.14. 2) $16a^{12}$; 4) $-64x^6y^3$; 6) $x^6y^9z^3$; 8) $\frac{1}{256}a^{12}x^4$.
- 3.15. 1) $-27a^3y^6$; 3) $\frac{1}{16}x^{20}y^8$; 5) $0,00001a^5y^{10}$; 7) $-\frac{1}{27}x^9y^6$;
9) $0,16a^4y^6$.
- 3.16. 2) $(2b)^2$; 4) $(0,9a^5y^2)^2$; 6) $\left(\frac{1}{4}xy^2\right)^3$; 8) $(-0,1a^4b^4)^3$;
10) $(0,3m^5p^{12})^3$.
- 3.17. 1) $-432x^{13}$; -432 ; 13; 3) $0,1cx^5y^4$; 0,1; 10; 5) $-0,027a^6b^7x$;
 $-0,027$; 14.
- 3.18. 2) $-64x^6y^{17}$; -64 ; 23; 4) $0,008x^{11}y^{18}z^{12}$; 0,008; 41;
6) $-80a^9b^9c^9$; -80 ; 27.
- 3.20. 2) $m^4n^3 + m^6n^4 - 0,1m^4n^8$; 4) $3m^7n^2 + 10n^4$;
6) $-4,5a^2m^9 + 2a^4b^7m^5$; 8) $-\frac{64}{9}m^3n + 4x^5y^4$.
- 3.22. Например: 2) $-2y^6 + (-21x^5 + 13x + 2)$;
4) $2,6a^2b^2 + (4,9ab^2 - 7a^2b - 13ab)$.
- 3.23. 1) $18a$; 1; 3) $-2a$; 1; 5) $-3m$; 1; 7) 0, степень не
определена; 9) $4ab$; 2.
- 3.24. 2) $7xy$; 2; 4) $12x^2y$; 3; 6) $7a^2b^2$; 4; 8) $-18x^2$; 2;
10) $-5a^2y$; 3.
- 3.25. 1) $\frac{2}{3}a$; 1; 3) $\frac{25}{36}y^2$; 2; 5) $3\frac{7}{8}a^2b^2$; 4.
- 3.26. 2) $b^3 - 14b^2$; 3; 4) $-9a^3 + 6a^2$; 3; 6) $5xyn^8 + 4xyn^3$; 10;
8) $11ab^2c^3 + 20ab^2c$; 6.
- 3.27. 1) $7a^2 + 7a$; 2; 3) $-5x - 2$; 1; 5) $3y^4 + 3y^2 + y$; 4;
7) $-10m^2n^2 - m^2n - 3mn^2 + 8mn$; 4.
- 3.28. 2) $-20a^5 + 15a^2$; 5; 4) $-6ax + 15ab$; 2; 6) $-\frac{1}{6}a^3$; 3;
8) $p^3 - 0,5p^2$; 3.
- 3.29. 1) Да; 3) да; 5) нет.

- 3.30. 2) 74; 4) -172.
- 3.31. 1) 7; 3) 8; 5) 2; 7) 2.
- 3.32. 2) 15; 4) 8.
- 3.33. 1) 25; 3) 5; 5) $\frac{2}{3}$; 7) -6.
- 3.34. 2) $x - 3$; 4) $-8ax^2$; 6) 0; 8) $4a^3 + 2a^2b + 3a^2 - 1$.
- 3.35. 1) $-m$; 3) $-22a^2b^2$.
- 3.36. 2) $b + c$; 4) $-y$; 6) $-y$; 8) $y - 10$; 10) a^2 .
- 3.37. 1) $-a^2$; 3) $2x^2 - 3ax$; 5) $-2x^2 - 3ax$; 7) $\frac{1}{6}a + \frac{2}{3}$;
9) $-\frac{1}{6}a - \frac{1}{12}$.
- 3.38. 2) $1,3x^2 + 1,2x$; 4) $-1,2a^2 - 0,7a$; 6) $4y^3 - 5y$.
- 3.39. 1) $-9x^2 - 4ax + x$; 3) $-3a^2z + 44az + a$; 5) $10abc - 5bc + a$.
- 3.40. 2) $-4x^2y + y^2$; 4) $-\frac{7}{8}x - \frac{3}{14}y$; 6) $8a^3 + 4ax^2 + 14bx^2 - 4cx$.
- 3.41. 1) $ac + ad$; 3) $2ay - 3by$; 5) $18a^2 - 6ab$; 7) $-3xy + 3x^2$.
- 3.42. 2) $9m^2 + 6m - 3n$; 4) $-2x + 14y + 16p$; 6) $-7y^3 - 7y^2 + 21y$;
8) $3c^3 + 6c^2 + 9c$.
- 3.43. 1) $40ay^3 + 20a^2y^2 - 5a^3y$; 4; 3) $30b^3c + 48b^2c^2 + 18bc^3$; 4;
5) $12b^3y^3 - 16b^2y^4 + 16b^2y^3 + 20by^4$; 6;
7) $12a^4b^3 - 6a^3b^4 + 3a^2b^5$; 7.
- 3.44. 2) $-6a^3y^3 + 3,6a^2y^3 - 5,4ay^5$; 6;
4) $-\frac{8}{27}a^4y^3 + \frac{2}{9}a^4y^2 - \frac{4}{27}a^3y^2$; 7;
6) $a^4b^4 - 2,5a^3b^5 + 3,5a^2b^4$; 8; 8) $-0,8a^3b^4 + 2a^3b^3 - a^2b^4$; 7;
10) $11\frac{2}{3}a^{10}y^6 + 12a^7y^7 + 45a^5y^{10}$; 16.
- 3.45. 1) $20a^5 - 25a^4 + 2a^3$; 5; 3) $10b^2 - 2ab$; 2.
- 3.46. 2) $6mn - 8n^2$; 2; 4) $-29p^2 + 5pt + 8t^2$; 2.
- 3.47. 1) 2; 3) $-1\frac{2}{11}$.
- 3.48. 2) -30; 4) -2; 6) 8.
- 3.49. 1) $b^{2k+2} + 2b^{k+4}$; 3) $4a^{2p+1} + 6a^p$;
5) $-10a^{2n+4} + 20a^{2n+3} + 15a^{2n+6}$;
7) $-6a^{2n+1}b^7 + 4a^{2n+2}b^4 - 8a^{2n+3}b^5$.
- 3.50. 2) $K = mx - my + nx - ny$; 4) $L = k^2 - kl + 3k - 3l$;
6) $M = k^2 - 5k - 14$; 8) $N = 10y^2 + 18y - 4$;
10) $F = -6b^2 - 7b + 20$.
- 3.51. 1) $-8a^2 + 30ax - 18x^2$; 3) $15b^2 + 2bc - 8c^2$;

- 5) $18m^4 + 3m^2 - 3$; 7) $-12a^4 - 16a^2b^2 + 16b^4$;
 9) $15m^4 - 14m^3n + 3m^2n^2$.
- 3.52. 2) $-\frac{1}{6}b^2 + \frac{1}{6}bc + \frac{1}{8}c^2$; 2; 4) $-\frac{1}{10}p^2 - \frac{17}{100}pt + \frac{1}{5}t^2$; 2.
- 3.53. 1) $a^3 - b^3$; 3; 3) $-d^3 - 5d^2p + 8dp^2 - 2p^3$; 3;
 5) $z^4 - 2z^3 + 2z^2 - 2z + 1$; 4;
 7) $7m^4 + 21m^3n - 28m^2n^2 - 6m^2n - 18mn^2 + 24n^3$; 4.
- 3.54. 2) $m^4 - 2m^3n + n^4$; 4;
 4) $3m^3 - 9m^3n - 9m^2n^2 + 34mn^3 + 5m^2n + 40n^4$; 4;
 6) $4p^6 - 10p^5 - 5p^4 + 9p^3 + 9p^2 - 20p + 6$; 6; 8) $4k^2 - 9m^2$; 2;
 10) $25p^2 - 4t^2$; 2.
- 3.55. 1) $-0,36x^3 + 0,48x^2y - 1,8xy - 3x + 2,4y^2 + 4y$; 3;
 3) $1,68b^3 - 0,86b^2c + 0,42bc^2 - 0,03c^3$; 3; 5) $8a^3 - b^3$; 3.
- 3.56. 2) $x^2y - x^2 - y^3 + y^2$; 3; 4) $-k^3 + 2k^2 + kt^2 - 2t^2$; 3;
 6) $m^4 - n^4$; 4; 8) $a^3 - 3a^2c + 3ac^2 - c^3$; 3.
- 3.57. 1) $2mx - 2ny$; 3) $2kl + 2k + 8l$; 5) $-2k^2 + 4k + 26$;
 7) $16y^2 + 19y - 6$; 9) $-12b^2 + 6b + 14$.
- 3.58. 2) 1,2; 4) 0.
- 3.60. 1) 36 см; 3) 70 см.
- 3.61. 1) $3abc$; 3) $0,05dnt$; 5) $1,3b^2$; 7) $0,1z^2$; 9) $-2ab$.
- 3.62. 2) $x - z - k$; 4) $n - k + t$; 6) $n - t + 1$; 8) $-3x^2 + 2x - 1$.
- 3.63. 1) $b^3y + b$; 3) $4k^3n^2 - 5k$; 5) $3m^5n^3 - 2,7n^4$.
- 3.64. 2) $a^2b^2y + 2ab - 5byz^4$; 4) $-8x^2 + xy - 0,5$;
 6) $-\frac{21}{2}a^2 + \frac{7}{6}ab^3 - \frac{1}{4}b^4$; 8) $\frac{9}{8}xy^2 - \frac{1}{2}x^6y^3 - 1$;
 10) $3a^3 + 0,4a^2 + 5$.
- 3.65. 1) $-90x + 60a - 5y$; 3) $0,9m - 0,8a^2mn - am^2n^2$;
 5) $20ax^3 - z - 0,5a^3x$; 7) $-6n^2p^5 - \frac{2}{3}mn^3p^2 + n^4p^6$.
- 3.66. 2) -129; 4) -140.
- 3.67. 1) Нет корней; 3) нет корней.
- 3.68. 2) 3; 4) -2; 6) 5; 8) -5.
- 3.69. 1) 1; 5; 3) -2; $\frac{1}{3}$.

Глава 4

- 4.1. 1) $m^2 - 6m + 9$; 3) $9c^2 - 6cd + d^2$; 5) $p^2 + 0,4p + 0,04$;
 7) $k^2 + 0,8k + 0,16$.
- 4.2. 2) $y^2 + \frac{8}{7}y + \frac{16}{49}$; 4) $m^2 - \frac{5}{4}m + \frac{25}{64}$.

- 4.3. 1) $49a^2 + 28a + 4$; 3) $\frac{1}{36}a^2 + 2ab + 36b^2$;
5) $36a^2 - 60a + 25$; 7) $\frac{1}{4}k^2 - \frac{1}{3}km + \frac{1}{9}m^2$.
- 4.4. 2) $\frac{1}{16}a^2 - ab + 4b^2$; 4) $121b^2 - 13,2b + 0,36$;
6) $100m^2 + 6m + 0,09$; 8) $\frac{p^2}{16} + \frac{pt}{10} + \frac{t^2}{25}$;
10) $\frac{16}{49}y^2 + 3yz + \frac{441}{64}z^2$.
- 4.5. 1) $49a^4b^6 + 42a^3b^5 + 9a^2b^4$; 3) $49a^6b^{18} - 28a^{10}b^{10} + 4a^{14}b^2$;
5) $4\frac{21}{25}a^{18} + 5\frac{13}{15}a^9b^5 + 1\frac{7}{9}b^{10}$; 7) $\frac{4}{81}a^4 + 0,4a^2b^3 + 0,81b^6$.
- 4.6. 2) $-4ab$; 4) $-11x^2 + 148x - 65$; 6) $-30p^2 + 5q^2$;
8) $-277m^2 + 376mn - 152n^2$.
- 4.7. 1) $-5p^2 - 50p$; 3) 144; 5) $91b^4 + 200b^2 + 332$; 7) $16a^2 - 4$.
- 4.9. 1) Нет.
- 4.10. 2) 4624; 4) 9409; 6) 1 016 064; 8) 4 016 016.
- 4.11. 1) 64; 3) -2; 5) 8.
- 4.12. 2) -85; 4) 7.
- 4.13. 1) 1; 3) -1.
- 4.15. 1) $a^{2m} + 2a^mb^n + b^{2n}$; 3) $4a^{2m+12} - 16a^{m+6}b^{n+2} + 16b^{2n+4}$;
5) $a^{2m+2}b^4 + 2a^{m+n+3}b^2 + a^{2n+4}$;
7) $121a^{2m+6} - 44a^{m+3}b^{m+3} + 4b^{2m+6}$;
9) $\frac{9}{25}a^{4n+2}b^6 + \frac{4}{5}a^{3n+2}b^7 + \frac{4}{9}a^{2n+2}b^8$.
- 4.16. 2) $b^2 - 100$; 4) $c^2 - 4$; 6) $9 - y^2$; 8) $n^2 - 9m^2$.
- 4.17. 1) $400a^2 - 9b^2$; 3) $a^2b^2 - 1$; 5) $\frac{1}{4}a^2 - 9$; 7) $\frac{25}{81}a^2x^2 - \frac{9}{16}b^2c^2$.
- 4.18. 2) $3a^2 - 48$; 4) $1,8y - 0,2y^3$.
- 4.19. 1) $-a^2 - 2ay - y^2$; 3) $y^2 - x^2$; 5) $n^2 - m^2$; 7) $1 - 36b^2$;
9) $9a^2b^2 - 1$; 11) $3x^3 - 12x$.
- 4.20. 2) 2496; 4) 9999; 6) 24,9999; 8) 675,96; 10) $48\frac{176}{225}$.
- 4.21. 1) $193^2 > 192 \cdot 194$; 3) $1243 \cdot 1245 < 1244^2$.
- 4.22. 2) -32; 4) -64.
- 4.23. 1) $10x^2 - 16$; 3) $49 - 10a^2$; 5) $40b^2 + 4$.

- 4.24. 2) 26; 4) 113; 6) 57,75; 8) -840.
- 4.25. 1) $x^3 - x^2y - xy^2 + y^3$; 3) $x^4 - 8x^2 + 16$;
5) $1296b^4 - 648b^2 + 81$; 7) $a^4 - 18a^2 + 81$; 9) $n^8 - 1$.
- 4.26. 2) $81b^8 - c^8$; 4) $16a^8b^{12} - 625$.
- 4.27. 1) $289a^6b^{10} - 4$; 3) $7\frac{21}{25}a^4 - 1\frac{75}{121}b^2c^2$;
5) $\frac{4}{9}a^2 + \frac{9}{49}b^2 - \frac{25}{81}c^2 + \frac{4}{7}ab$.
- 4.28. 2) $a^4x^6 - 25$; 4) $x^6 - 25k^{2n}$; 6) $0,49x^8 - 9y^2$; 8) $a^{6k} - 49b^{2k+6}$.
- 4.29. 1) 0,5; 3) 1,85; 5) 3; 7) 3.
- 4.30. 2) $m^3 + 3m^2n + 3mn^2 + n^3$; 4) $125n^3 - 75n^2 + 15n - 1$;
6) $8a^3 + 72a^2 + 216a + 216$; 8) $x^9 - 3x^6y^2 + 3x^3y^4 - y^6$.
- 4.31. 1) $\frac{27}{64}a^3b^6 + \frac{9}{8}a^4b^4 + a^5b^2 + \frac{8}{27}a^6$;
3) $\frac{1}{27}a^3b^3 - \frac{1}{3}a^2b^2c + abc^2 - c^3$; 5) $a^9x^3 + 3a^7x^4 + 3a^5x^5 + a^3x^6$;
7) $0,064a^{15} - 0,144a^{13} + 0,108a^{11} - 0,027a^9$.
- 4.32. 2) $a^{3n+3} + 3a^{2n+2} + 3a^{n+1} + 1$;
4) $a^{6k-9} - 0,6a^{4k-6}b^{n-1} + 0,12a^{2k-3}b^{2n-2} - 0,008b^{3n-3}$.
- 4.33. 1) $(a^3 + c)^3 = a^9 + 3a^6c + 3a^3c^2 + c^3$;
3) $(5a^2b - 2ab^2)^3 = 125a^6b^3 - 150a^5b^4 + 60a^4b^5 - 8a^3b^6$;
5) $64m^3 - 288m^2n + 432mn^2 - 216n^3 = (4m - 6n)^3$;
7) $125x^3 + 225x^2y + 135xy^3 + 27y^3 = (5x + 3y)^3$.
- 4.34. 2) Нет; 4) да.
- 4.37. 1) 64; 3) 10.
- 4.38. 2) -1; 4) 2.
- 4.39. 1) $(x + y)^3$; 3) $\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}y\right)^3$; 5) $(5ab - 3c^2)^3$.
- 4.40. 2) $p^3 + 1$; 4) $27 - 8a^3$; 6) $p^6 - 1$; 8) $27b^9 + 1$; 10) $\frac{8}{27}a^{12} + \frac{27}{8}b^{12}$.
- 4.41. 1) $-2a^2 - a - 1$; 3) $2x^3 - 2x^2 + x + 4$.
- 4.42. 2) 8,125; 4) 33; 6) 54.
- 4.44. 2) $125 - m^3 = (5 - m)(25 + 5m + m^2)$;
4) $125m^9 + 216n^{12} = (5m^3 + 6n^4)(25m^6 - 30m^3n^4 + 36n^8)$.
- 4.45. 1) 6; 3) 900.
- 4.47. 1) 35; 2) 279.
- 4.48. 2) 2; 4) $-1\frac{1}{9}$.

Глава 5

- 5.1. 1) $4(p+q)$; 3) $7(m-k)$; 5) $4(y-2x)$; 7) $k(x+1)$.
5.2. 2) $b(c-m)$; 4) $m(k-p)$; 6) $9b(a+2c)$; 8) $-12n(m+1)$.
5.3. 1) 16 000; 3) 36; 5) 28 000; 7) 278; 9) 10.
5.4. 2) $a^2(a+1)$; 4) $d^5(d-1)$; 6) $b^3(4+b^2-b^3)$; 8) $a^3(a^2-2-a^4)$.
5.5. 1) $7m^6(1-3m^2)$; 3) $a^3(4a^4-11)$; 5) $5y^2(5y^2-3)$.
5.6. 2) $8n^6(2n^3+3n+1)$; 4) $mn^4(m^2n-1)$; 6) $xy(8xy+7x-5)$.
5.7. 1) $7x^4y^5(2+5y)$; 3) $3ab(1-2b-6ab^2)$;
5) $5x^4y(5y^2+3xy-4)$; 7) $4tx^3(2t+18t^3x+3x^2)$;
9) $6a^2b(b-1+3b^2)$.
5.8. 2) $(x+y)(d-k)$; 4) $(a-4)(k+l)$; 6) $(x+5)(a-1)$;
8) $(6-x)(a+8)$.
5.9. 1) $(c-k)(5a+4c)$; 3) $(b+x)(13a-17x)$;
5) $(a-b)(m-1)(m^2+m+1)$.
5.10. 2) $(5y+7z)(3a-7b+d)$; 4) $(3a^2-2b)(y-n+3x)$;
6) $\frac{1}{2}(m+n-t)(14x-8y+m)$.
5.11. 1) $(a-b)(1-m)$; 3) $(q-p)(5l+2)$.
5.12. 2) $(3-m)(t^3+d)$; 4) $(d-c)(27y^2-4)$; 6) $(0,5-y)(x+4)$;
8) $(a-b)(1+7m)$; 10) $(m-n)(3p-1)$.
5.13. 1) $(c-d)(c-d-1)$; 3) $(x-y)^2(13x^2-13xy-5)$.
5.14. 2) $(p-q)(4-a-3b)$; 4) $(4p-5t)(m+n-d)$;
6) $(8a-9b)(s^5+g^7+r^3)$; 8) $t^3(4a-11b)(1+t^3+t^6)$.
5.15. 1) $(x+y)(x+y+2)$; 3) $0,1(a-b)(50a+50b+1)$;
5) $b(a+b)^3$; 7) $(x-y)^2(1-y)$.
5.16. 2) $c^k(c^m+1)$; 4) $2m^4(m^n-2)$; 6) $5n^{m+2}(3n+5)$.
5.17. 1) -9; 0; 3) 0; 6; 5) 0; 7.
5.18. 2) 32; 4) 43.
5.19. 1) 16 000; 3) -1500; 5) 2.
5.20. 2) $(a+b)(c-d)$; 4) $(a-b)(c-d)$; 6) $(a-b)(a+c)$;
8) $(a-b)(a-c)$.
5.21. 1) $(y+z)(x+1)$; 3) $(m+n)(k+1)$; 5) $(m+n)(1-k)$;
7) $(m+5)(n+k)$.
5.22. 2) $(d-1)(d^2+4)$; 4) $(b^2+2)(b-3)$; 6) $(b+3)(b^2-2)$;
8) $(b+y)(3b^2+y^2)$.

- 5.23. 1) $(b+y)(y^2-3b^2)$; 3) $(y-b)(y^2+3b^2)$; 5) $x(a^2-x)(3-5x)$;
7) $(x-y)(x^2+y^2)$.
- 5.24. 2) $(m+n)(6k+1)$; 4) $(a-b)(c+1)$; 6) $(a-b)(2k-1)$;
8) $(c-d)(2y-1)$.
- 5.25. 1) $5(x+y)(7x+4)$; 3) $(3b^2+2c^2)(16a-5c)$;
5) $(8a-7c)(b^2+2c^2)$; 7) $(4a-5c)(2x-7c)$.
- 5.26. 2) $t^2(m+n-p)(t+1)$; 4) $(2m-mn-n^2)(5m-2)$;
6) $(a+b-c)(n^2-m^3)$; 8) $(a-b+c)(m^3+n^2)$.
- 5.27. 1) $(4a-3)(2a-1)^2$; 3) $\frac{1}{28}(3-8m)(4b+7x+28)$;
5) $\frac{1}{57}(8k-1)(57-38n-21m)$.
- 5.29. 1) 220; 3) 5.
- 5.30. 2) $(b-3)(b+3)$; 4) $(1-y)(1+y)$; 6) $(9b-7)(9b+7)$;
8) $4(5a-6)(5a+6)$.
- 5.31. 1) $(xy-3)(xy+3)$; 3) $(4-xy)(4+xy)$;
5) $\left(\frac{2}{3}ab - \frac{13}{30}x\right)\left(\frac{2}{3}ab + \frac{13}{30}x\right)$; 7) $\frac{1}{400}(25x-1)(25x+1)$.
- 5.32. 2) $(a^2-5)(a^2+5)$; 4) $(4-a)(a+4)(a^2+16)$.
- 5.33. 1) $(a-5)(a+5)(a^2+25)$; 3) $(a-b^2)(a+b^2)(a^2+b^4)$;
5) $(a-b)(a+b)(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$; 7) $(a^3-b^4)(a^3+b^4)$.
- 5.34. 2) $(2-xy^2)(2+xy^2)$; 4) $25(b^2-2a)(b^2+2a)$;
6) $y^4(x^2y-1)(x^2y+1)$; 8) $(m^3-3)(m^3+3)$.
- 5.35. 1) $(a+b-c)(a+b+c)$; 3) $(5x+4y-4c)(5x+4y+4c)$;
5) $(2m-10xy-1)(2m+10xy-1)$;
7) $(4p+5q-7t^2)(4p+5q+7t^2)$;
9) $(a^2+b-4b^2y)(a^2+b+4b^2y)$.
- 5.36. 2) $(a-b)^2(a+b)^2$; 4) $(a+b-10)(a+b+10)$;
6) $\left(\frac{5}{8}c-4\right)\left(\frac{11}{8}c-4\right)$; 8) $(0,9a-b)(1,1a-b)$; 10) $-4c(a-c)$.
- 5.37. 1) $(4a-b)(6a+b)$; 3) $(3n-m)(m+n)$; 5) $(2c-5a)(5a+6c)$;
7) $(6a-b)(8a+b)$.
- 5.38. 2) 34 000; 4) 63 600; 6) 58; 8) 157,5.
- 5.39. 1) 2520; 3) 4,67; 5) 21; 7) $34\frac{2}{7}$; 9) 370.
- 5.40. 2) 2; 4) 14,5.
- 5.41. 1) -5; 5; 3) -8; 8; 5) -0,9; 0,9; 7) -7,5; 7,5.
- 5.42. 2) -9; 9; 4) -5; 5; 6) нет корней; 8) 0.

- 5.43. 1) $(7^n - 6^n)(7^n + 6^n)$; 3) $(10^n - 9^n)(10^n + 9^n)$;
 5) $(a^n - b^m)(a^n + b^m)$; 7) $(a^{4n} - b^{3m})(a^{4n} + b^{3m})$.
- 5.44. 2) $(y - 3)^2$; 4) $(a + b)^2$; 6) $(m + n)^2$; 8) $(3a - 1)^2$; 10) $(4x - 3)^2$.
- 5.45. 1) $(x^2 + y^2)^2$; 3) $(x + 3y^2)^2$; 5) $(x^2 - k)^2$; 7) $(5a^2 - y^2)^2$;
 9) $(6b^2 + p^2)^2$.
- 5.46. 2) $(4mn - 5k)^2$; 4) $(0,6pq + 0,5t)^2$; 6) $\left(\frac{1}{2}a - 1\right)^2$;
 8) $\left(1\frac{4}{5}a^4 + 1\frac{2}{3}b^5\right)^2$.
- 5.47. 1) $64x^2 - 112xy + 49y^2 = (8x - 7y)^2$;
 3) $144a^2 + 120ab + 25b^2 = (12a + 5b)^2$;
 5) $49m^4 - 126m^2n^4 + 81n^8 = (7m^2 - 9n^4)^2$;
 7) $196c^2 + 140cd^5 + 25d^{10} = (14c + 5d^5)^2$.
- 5.48. 2) 100; 4) 10 000.
- 5.49. 1) 0,16; 3) 0.
- 5.50. 2) 10 000; 4) 2; 6) 8.
- 5.51. 1) $\frac{2}{7}$; 3) -12; 5) 4,5; 7) $-\frac{8}{15}$.
- 5.52. 2) $(8p^n - 4q^{4k})^2$; 4) $(10x^{5n} - 9y^{3t})^2$; 6) $(11a^{k+4} + 13b^{4k})^2$;
 8) $(7m^{6k} - 12n^{2t})^2$; 10) $(5^{6n} - d^{4n})^2$.
- 5.53. 1) $(a + b)^3$; 3) $(k - 2n)^3$; 5) $(5y + 1)^3$; 7) $\left(\frac{1}{3}a + 6\right)^3$.
- 5.54. 2) $(mn^4 - 3p)^3$; 4) $(m^2n^4 + 2p^3)^3$; 6) $\left(\frac{4}{5}mn^3 + \frac{1}{4}p^4\right)^3$.
- 5.55. 1) $(3 - 2a)(4a^2 + 6a + 9)$; 3) $(4t + 3)(16t^2 - 12t + 9)$;
 5) $(1 - 5a^3)(1 + 5a^3 + 25a^6)$; 7) $(8a^5 + 1)(64a^{10} - 8a^5 + 1)$.
- 5.56. 2) $(4a - 5b)(16a^2 + 20ab + 25b^2)$;
 4) $\left(\frac{1}{3}y^2 + \frac{1}{4}z^4\right)\left(\frac{1}{9}y^4 - \frac{1}{12}y^2z^4 + \frac{1}{16}z^8\right)$;
 6) $\left(\frac{1}{5}a^2 - \frac{1}{2}b^3\right)\left(\frac{1}{25}a^4 + \frac{1}{10}a^2b^3 + \frac{1}{4}b^6\right)$.
- 5.57. 1) $(mn - 1)(m^2n^2 + mn + 1)$; 3) $(a^2b - 3)(a^4b^2 + 3a^2b + 9)$;
 5) $\left(a^2b^2 + \frac{1}{7}\right)\left(a^4b^4 - \frac{1}{7}a^2b^2 + \frac{1}{49}\right)$;
 7) $\left(\frac{4}{5} - a^4b^5\right)\left(a^8b^{10} + \frac{4}{5}a^4b^5 + \frac{16}{25}\right)$.

- 5.58. 2) $(10m^2n + 4t)(100m^4n^2 - 40m^2nt + 16t^2)$;
 4) $(3m^2 - 6k^6n^7)(9m^4 + 18k^6m^2n^7 + 36k^{12}n^{14})$;
 6) $\left(\frac{4}{7}m^3 - \frac{3}{8}k^5n^4\right)\left(\frac{16}{49}m^6 + \frac{3}{14}k^5m^3n^4 + \frac{9}{64}k^{10}n^8\right)$;
 8) $(4^m + 7^k)(16^m - 4^m \cdot 7^k + 49^k)$;
 10) $\left(\frac{6}{7}m^2n^5 - \frac{1}{3}k^3t^4\right)\left(\frac{36}{49}m^4n^{10} + \frac{2}{7}k^3m^2n^5t^4 + \frac{1}{9}k^6t^8\right)$.
- 5.59. 1) 6859; 3) 2.
- 5.60. 2) $\left(\frac{1}{7}x + y\right)\left(\frac{1}{49}x^2 - \frac{1}{7}xy + y^2\right) = \frac{1}{343}x^3 + y^3$;
 4) $\left(\frac{1}{5}a^{3n+1} + \frac{7}{8}a^{2m+2}\right)^3 = \frac{1}{125}a^{9n+3} + \frac{21}{200}a^{2m+6n+4} + \frac{147}{320}a^{4m+3n+5} + \frac{343}{512}a^{6m+6}$.
- 5.61. 1) $2(m-n)(m+n)$; 3) $7(1-n)(1+n)$; 5) $n(5-n)(5+n)$;
 7) $a^3(1-a)(1+a)$; 9) $6a^7(a-1)(a+1)$.
- 5.62. 2) $\left(\frac{7}{10}a - \frac{4}{9}c\right)\left(\frac{7}{10a} + \frac{4}{9}c\right)b$; 4) $3n^3(5m-3p)(5m+3p)$;
 6) $5ab(5-4a)(5+4a)$; 8) $3m^3n^3\left(\frac{1}{5}m - \frac{2}{11}n\right)\left(\frac{1}{5}m + \frac{2}{11}n\right)$.
- 5.63. 1) $5(2a+b-2c)(2a+b+2c)$;
 3) $7(3m-2n-4p)(3m-2n+4p)$; 5) $\left(1 - \frac{9}{8}b\right)\left(\frac{27}{8}b + 1\right)$;
 7) $(a+1)\left(\frac{5a}{3} - 1\right)$.
- 5.64. 2) $9(10a-21b)(11b-6a)$; 4) $(14a-57b)(42a-41b)$;
 6) $12(ab+2)(7ab-6)$; 8) $9b^6(3a^3-1)(5a^3+1)$.
- 5.65. 1) $(a-1)(a+1)(a^2+1)(a^4+1)$; 3) $(2-a)(2+a)(a^2+4)$;
 5) $(5b^2-2a)(5b^2+2a)(25b^4+4a^2)$.
- 5.66. 2) $-2 \cdot 5^n - 1$; 4) $-3(2 \cdot 8^n - 3)$; 6) $-5(2 \cdot 3^{n+4} - 5)$;
 8) $3^{2n}(3^n - 5^n - 1)(3^n + 5^n + 1)$.
- 5.67. 1) $(a+b)(a-b-1)$; 3) $(a+b)(a-b+1)$; 5) $(a-b)(a+b+1)$.
- 5.68. 2) $(m+n)(m-5)(m+5)$; 4) $(p-b)(p+b)(k+4)$;
 6) $(c-k)(c+k)(c-8)$.
- 5.69. 1) $3(a-4)^2$; 3) $2(3b-5)^2$; 5) $-10(8a+1)^2$; 7) $2m(3n-2)^2$.
- 5.70. 2) $(a-b-k)(a-b+k)$; 4) $(b-a-6)(a+b+6)$;
 6) $(n-m-3)(n+m-3)$; 8) $(3a+2b-2c)(3a+2b+2c)$.
- 5.71. 1) $4m^2$; 3) $(a-b)^3$.

- 5.72. 2) $\frac{x(5x-2y)}{5x+2y}$; 4) $\frac{2a^2(x-y)}{5a+2y}$.
- 5.73. 1) $(x-3)(x+1)$; 3) $(x-1)(x+5)$; 5) $(x-1)(x-10)$;
7) $(x-5)(x+4)$.
- 5.74. 2) -1; 2; 4) -11; 2.
- 5.75. 1) -1; 0; 1; 3) -2; 0; 2.
- 5.76. 2) -4; 6; 4) -5; -2.
- 5.77. 1) $(a^2-ab+b^2)(a^2+ab+b^2)$; 3) $(a^4-a^2b^2+b^4)(a^4+a^2b^2+b^4)$;
5) $(b^4-4b^2+16)(b^4+4b^2+16)$; 7) $a(a^2-ab+b^2)(a^2+ab+b^2)$.
- 5.78. 2) $(b^2-4b+8)(b^2+4b+8)$;
4) $(9m^2-6mn^3+2n^6)(9m^2+6mn^3+2n^6)$.
- 5.79. 1) 8; 3) -7.
- 5.80. 2) $(5a-2)^3$; 4) $\left(z+\frac{1}{3}\right)^3$.
- 5.81. 1) $(x+y+z)(x^2+y^2+z^2+2xy-xz-yz)$; 3) $4(3a^2+4)$;
5) $(x-y)(x+y)(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$;
7) $(a+m)(a^2+3ab+3b^2-am-3bm+m^2)$.
- 5.82. 2) $B=(m+n^4-p^3)^2$.

Глава 6

- 6.1. 1) -5, -4, 0, 3, 6.
- 6.2. 2) $x \neq \pm 5$; 4) $a \neq \pm 5$; 6) $a \neq 1$; 8) $a \neq -3$.
- 6.3. 1) Все числа; 3) $a \neq 0$; $a \neq 3$; 5) $x \neq 0$; $x \neq 7$; 7) $x \neq \pm 4$; 9) $x \neq \pm 10$.
- 6.4. 2) ± 5 ; 4) 5; 6) 2,25; 8) -2,25.
- 6.5. 1) $\frac{2}{a-b}$ и $\frac{-3}{a-b}$; 3) $\frac{10}{c-d}$ и $\frac{-7}{c-d}$; 5) $\frac{4}{p-t}$ и $\frac{-8}{p-t}$.
- 6.6. 2) $-9t$; 4) $(5m-n)^2$; 6) n^3 .
- 6.7. 1) $\frac{2x}{7}$; 3) $\frac{5t}{2}$; 5) $-\frac{c}{k}$; 7) $2y$.
- 6.8. 2) $\frac{xy}{3}$; 4) $-\frac{c^2dx}{10}$.
- 6.9. 1) -9; 3) -0,25.
- 6.10. 2) $\frac{b}{2b-a}$; 4) $\frac{a-2b}{3a+4b}$; 6) $\frac{x-y}{x+y}$; 8) $\frac{x}{b+c}$.
- 6.11. 1) $\frac{1}{(5m-n)^3}$; 3) $\frac{a-1}{d+l}$; 5) $-\frac{x}{y}$; 7) $\frac{1}{ab}$; 9) $-\frac{1}{ay}$.
- 6.12. 2) $\frac{1}{m+n}$; 4) $\frac{1}{m-n}$; 6) $7p+2m$; 8) $\frac{1}{7p-8t}$.

- 6.13. 1) $-\frac{1}{y+z}$; 3) $-\frac{a}{2(4a+5x)}$.
- 6.14. 2) $-\frac{x+5}{3}$; 4) $\frac{2x+7}{2}$; 6) $-\frac{1}{9a+8b}$; 8) $-2(3a+5)$.
- 6.15. 1) $7y-4a$; 3) $\frac{a}{a+5}$; 5) $-\frac{m+n}{c}$; 7) x^2-y^2 ;
9) $\frac{1}{m(y^2+d^2)}$.
- 6.16. 2) $\frac{1}{3a+2}$; 4) $\frac{3y-1}{3y+1}$.
- 6.17. 1) ± 2 ; 3) ни при каком; 5) ни при каком.
- 6.18. 2) -3 ; 4) при любом неотрицательном значении.
- 6.19. 1) 25; 3) 18; 5) $-0,7$; 7) $2\frac{2}{3}$.
- 6.20. 2) -7 ; 4) 4; 6) 7.
- 6.21. 1) $x \neq -2$; 3) $x \neq 3$.
- 6.22. 2) -2 ; 3) 3; 4) $\frac{2}{3}$.
- 6.23. 1) $\frac{a^2b^2(a-b)}{2(a+b)}$; 2) $\frac{4x+4y}{3x-3y}$; 3) $\frac{3}{2x(x+1)}$; 4) $\frac{2x}{x+1}$;
5) $\frac{3b(a-b)}{a(a+b)}$; 6) $\frac{2ab^2(a-1)}{3(a+1)}$; 7) $\frac{7}{a(a+2)}$; 8) $\frac{a^2-6a}{2}$.
- 6.24. 2) $\frac{9p^3}{p^{10}}$, $\frac{k}{p^{10}}$; 4) $\frac{3}{(n+2)^7}$, $\frac{2p(n+2)^4}{(n+2)^7}$.
- 6.25. 1) $\frac{3ac}{3c}$, $\frac{2b}{3c}$; 3) $\frac{7ap}{7p}$, $\frac{5t}{7p}$; 5) $\frac{1}{p+3}$, $\frac{p(p+3)}{p+3}$.
- 6.26. 2) b^4 ; 4) $21xy$; 6) $15xy(3m+2)$.
- 6.27. 1) $\frac{5z^2}{z^3}$, $\frac{-71}{z^3}$; 3) $\frac{12bx}{10ab}$, $\frac{7y}{10ab}$;
5) $\frac{8bx-12b}{12ab(2x-3)}$, $\frac{6axy-9ay}{12ab(2x-3)}$, $\frac{60ab}{12ab(2x-3)}$.
- 6.28. 2) $\frac{3}{a+5b}$, $\frac{-4}{a+5b}$; 4) $\frac{3}{m-n}$, $\frac{-5}{m-n}$.
- 6.29. 1) 14; 2) 1; 3) 48; 3) 2; 5) $72c^3$; $4c^2$; 9) 7) $21a^3p^3x^5$; $3ax^4$; p^2 .
- 6.30. 2) $10(t+2)$; 2) 5; 4) $6(p-3)(p+3)$; $3(p+3)$; $2(p-3)$.
- 6.31. 1) $84(a^2-1)$; 12; $21(a-1)$; $28(a+1)$;
3) $(n+1)^2(n-1)$; $(n-1)$; $(n+1)(n-1)$; $(n+1)^2$.

- 6.32. 2) $\frac{5-c}{9}$; 4) $\frac{c+5}{12}$; 6) $\frac{7-c}{11}$; 8) $\frac{10+a}{m}$.
- 6.33. 1) $\frac{n}{x}$; 3) $\frac{-2x}{y}$; 5) $\frac{2m+2n}{3d^3t}$.
- 6.34. 2) $\frac{x}{6z}$; 4) $\frac{2y+1}{8t}$; 6) $\frac{3x-4y}{5a}$; 8) $\frac{3y+3}{5c}$.
- 6.35. 1) 1; 3) $\frac{3b^2+bc}{a}$; 5) $\frac{b^2+4}{2b}$; 7) $\frac{1}{x+2y}$.
- 6.36. 2) $\frac{4b+12}{k-4}$; 4) $\frac{2b-2a}{m+n}$; 6) $\frac{5}{m-4}$; 8) $\frac{5-y}{5+y}$;
10) $\frac{n^2+3n-9}{n^2-6n+9}$.
- 6.37. 1) $\frac{21a+8}{28}$; 3) $\frac{2b-3}{8}$; 5) $\frac{ak-6}{2a}$; 7) $\frac{3d-2}{d}$;
9) $\frac{12m+4}{m}$.
- 6.38. 2) $-\frac{a}{6}$; 4) $\frac{m}{42}$; 6) $\frac{6a^2-3a-2}{a^2}$; 8) $\frac{4k^2-k-1}{k^2}$.
- 6.39. 1) $\frac{x}{2b}$; 3) $\frac{5b}{27y}$; 5) $\frac{21y-4z}{90xyz}$; 7) $\frac{4az-15y}{54xyz}$.
- 6.40. 2) $\frac{17c}{24}$; 4) $\frac{7x+4y}{20}$; 6) $\frac{-b}{36}$; 8) $\frac{16x^2-27y^2}{20}$.
- 6.41. 1) $\frac{2d+3n}{mnd}$; 3) $\frac{n-2}{m^2n^2}$; 5) $\frac{4m^2+2mn-8n^2}{mn}$;
7) $\frac{am^2+3a^2n-5m^2n}{amn}$.
- 6.42. 2) $\frac{5y-14a}{7a^2y^2}$; 4) $\frac{m+md-mc}{c^2d^2}$; 6) $\frac{y+2}{4y^2}$; 8) $\frac{a^2+4y^2}{2ay}$;
10) $\frac{8y^3-9x^3}{6xy}$.
- 6.43. 1) $\frac{1}{a-1}$; 3) $\frac{n-d}{4k-p}$; 5) $\frac{4y}{x-y}$; 7) $\frac{3c+3}{c-k}$.
- 6.44. 2) $\frac{4a+4x-2}{4a-x}$; 4) $\frac{2x}{5m-3n}$; 6) $\frac{2x}{a^2-b^2}$; 8) $\frac{8a-8b}{x-y}$.
- 6.45. 1) k ; 3) $\frac{17a+5b}{5b-a}$; 5) $\frac{2c+d}{9c^2-4d^2}$; 7) $4x-3y$.

- 6.46. 2) $\frac{x^2 + 2ax - a^2}{a^2 - x^2}$; 4) $\frac{9m - 3n}{m^2 - n^2}$; 6) $\frac{5a^2 + 9a}{a^2 - 1}$;
8) $\frac{2(d^2 - 3)}{d^2 - 9}$; 10) $\frac{52a + 24}{25a^2 - 36}$.
- 6.47. 1) $\frac{-6b}{5(a + b)}$; 3) $\frac{7y - 12}{10(y^2 - 16)}$; 5) $\frac{-9m}{2(m + n)}$; 7) $\frac{9x^2 + 8y^2}{18(x - y)}$;
9) $\frac{1}{6(x + 1)}$.
- 6.48. 2) $\frac{5a^2}{6(2a - 3)}$; 4) $\frac{3a^2 - 2b^2}{ab(m - n)}$; 6) $\frac{ax - x^2 + ad - d^2}{xd(d - x)}$;
8) $\frac{x - 3c + 6}{4 - c^2}$; 10) $\frac{5x - 52}{121 - x^2}$.
- 6.49. 1) $\frac{t^2 - 10t}{t - 5}$; 3) $\frac{-7b^2 - 158b + 5}{84(b^2 - 1)}$; 5) $\frac{10m^2 + m - 87}{2m(m^2 - 9)}$;
7) $\frac{a - b}{a + b}$; 9) $\frac{2mn}{(2m + n)^2}$.
- 6.50. 2) -1; 4) -1; 6) $\frac{4m^2 + 2m + 4}{(m - 3)^3}$; 8) $\frac{18(k^2 + 5)}{(k^2 - 9)^2}$.
- 6.51. 1) $\frac{7y + 24}{y^2 - 81}$; 3) $\frac{3x^2 + 24}{25x^2 - 9}$; 5) $\frac{-30m^2 + 20m + 4}{3(25m^2 - 1)}$;
7) $\frac{4 - 3x + 3y}{(x - y)^2}$; 9) $\frac{10x - 5}{(x - 1)^2}$.
- 6.52. 2) $-\frac{1}{6}$; 4) 3,6.
- 6.54. 2) $\frac{6a + b}{a^2 + ab + b^2}$.
- 6.55. 1) $\frac{c}{38}$; 3) $\frac{3x}{5y}$; 5) 0,5; 7) 6b; 9) $-\frac{12b}{7}$.
- 6.56. 2) $\frac{mn}{2}$; 4) 1,6; 6) $-\frac{3b^2}{c^2d^2}$.
- 6.57. 1) $-\frac{d^2m}{18}$; 3) $\frac{y^2}{nm^2}$; 5) $\frac{16a^2c^2}{7}$; 7) 1; 9) $0,25my^2$.
- 6.58. 2) $-0,25n$; 4) $12az$; 6) $\frac{95n^2}{7}$.

6.59. 1) $-\frac{3bn}{2y}$; 3) $-1,5a^2mn^5$; 5) $-21t^2y^9z^3$; 7) $\frac{c^2}{4b}$.

6.60. 2) $\frac{m-n}{m+n}$; 4) $\frac{a(x+y)}{3}$; 6) $3x(x-y)$; 8) $-5a$.

6.61. 1) $-\frac{4}{x}$; 3) $-\frac{2a}{3}$; 5) $\frac{-a^2}{b(a+b)}$; 7) $\frac{a^2-a-12}{a^3}$;
9) $\frac{(a-2)(a-1)}{6(a+2)}$.

6.62. 2) 7,5; 4) $-\frac{9}{32}$; 6) $-\frac{81}{10250}$; 8) $12\frac{10}{17}$.

6.63. 1) 0; 3) $\pm 0,8$; 5) -2 .

6.64. 2) $\frac{a^{21}}{b^6}$; 4) $-\frac{64m^{12}}{125n^3}$; 6) $-\frac{ab^2m^2}{24}$; 8) $-\frac{8k^2n^{11}}{7m}$.

6.65. 1) $\frac{1}{6}$; 3) $\frac{(m+2)m}{(m+3)(m-2)}$;

6.66. 2) $\frac{24b}{55}$; 4) $\frac{2a}{13}$; 6) $\frac{11}{6x}$; 8) $\frac{17m}{2b}$.

6.67. 1) $\frac{1}{ab}$; 3) ab ; 5) $-12a^2b$.

6.68. 2) $\frac{2c}{11d^2}$; 4) $\frac{22p^3y}{x^4}$.

6.69. 1) $\frac{x}{432y^3}$; 3) $4 \cdot 14^4x^3y^{20}$.

6.70. 2) $\frac{7ax}{6}$.

6.71. 1) $-\frac{2am}{y}$; 3) $\frac{3cd^3x}{y}$.

6.72. 2) 1; 4) $\frac{x+y}{2x}$.

6.73. 1) $\frac{a+b}{a}$; 3) $\frac{3(a^2-b^2)(a-b)}{4}$.

6.74. 2) $\frac{2}{(x+y)^2}$.

6.75. 1) $1 + \frac{b}{a+b}$; 3) $1 + \frac{x+1}{x^2+1}$.

6.76. 1) -4 ; 2) $-\frac{6}{11}$.

6.77. 1) Нет корней.

6.78. 2) 4 ; 4) 2 .

6.79. 1) 5 ; 3) $\pm 2,5$.

6.80. 2) $\frac{1}{2a}$; 4) $2m$.

6.81. 1) $\frac{(a-5)^2}{a+5}$.

6.82. 2) $\frac{m+n}{8n^2}$.

6.83. 1) $\frac{x^2 - 2a^2}{2ax}$.

6.84. 2) $0,5$.

6.86. 2) Нет; 4) нет; 6) да.

6.87. 1) $-2x + 16$; 21; 3) $-8y - 30$; -6 ; 5) 10 ; 10 .

6.88. 2) 2 ; 4) 2 ; 6) 6 ; 8) 3 .

6.89. 1) $a^{3m} + b^{3n}$; 3) $-c^{3m+7} + c^{3m+1}$.

6.90. 2) 5 ; 4) -16 ; 1 .

6.91. 1) $0,7$; 3) $-0,3$.

6.92. 2) -1 ; 0 ; 4) -1 ; 0 ; 6) -3 ; 3 ; 8) ни при каких; 10) 2 .

6.93. 1) $-a - b$; 3) $\frac{a+6}{6-a}$; 5) $\frac{1}{4n^2 - 2n + 1}$; 7) $\frac{1}{a-b}$.

6.94. 2) $\frac{3}{(x+1)^2}$; 4) $\frac{2}{3}$.

6.95. 1) $\frac{c(c+2d)}{3}$; 3) $\frac{(4x+3y)(x+3y)}{(x-3y)(4x-3y)}$.

6.96. 2) $\frac{2t+4}{t}$; 4) $\frac{4b}{5a^2}$; 6) $-\frac{10}{k+m}$.

6.97. 1) -1 .

6.98. 2) $\frac{m(m-n)}{m+n}$.

6.99. 1) $\frac{5ax^2}{a+b}$.

$$6.100.2) -2\frac{1}{7}.$$

$$6.101.1) \frac{1}{k-4}.$$

$$6.102.2) \frac{4}{mn}; 4) \frac{2}{k+x}.$$

$$6.103.1) -2; 2; 3) -4.$$

$$6.104.2) \frac{1024}{3}b^{12}m^3n.$$

$$6.105.1) \frac{7(a^2+b^3)}{12(a^4-2b^5)(a^2-b^3)}; 3) -(a-2)^2.$$

$$6.106.2) \frac{135}{x}; 4) \left(\frac{x^4-1}{x^2}\right)^2.$$

$$6.107.1) \frac{1}{xyz}; 3) \frac{y^2-x^2}{x^2y^2}; 5) \frac{x^2-xy+y^2}{x^2y^2}.$$

$$6.108.2) \frac{-4a^6b^{12}}{(a^3-b^6)^2(a^3+b^6)}; 4) a^3; 6) \frac{2a^2}{m^2}; 8) \frac{4y^3}{x}.$$

$$6.109.1) \frac{2}{a+b}; 3) m^2n; 5) 1; 7) \frac{a}{2}.$$

Материалы для повторения

$$1. 1) 3\frac{2}{3}; 3) 17\frac{2}{9}; 5) 102\frac{5}{49}; 7) 473\frac{7}{11}.$$

$$2. 2) \frac{41}{6}; 4) \frac{87}{17}; 6) \frac{50}{27}; 8) \frac{205}{19}.$$

$$3. 1) \frac{3}{4}; 3) \frac{1}{5}; 5) \frac{11}{28}; 7) \frac{1}{2}.$$

$$4. 2) 45; 4) 720; 6) 15\ 375.$$

$$5. 1) 2520; 3) 6000; 5) 24\ 400.$$

$$6. 2) 405; 822; 1854; 3120; 2610; 58\ 035; 513\ 135;$$

$$4) 405; 1854; 2610; 513\ 135;$$

$$6) 3120; 2610; 8) 405; 2610; 513\ 135.$$

$$7. 1) 15; 3) 16; 5) 2; 7) 8; 9) 10.$$

$$8. 2) 24; 4) 102; 6) 1584; 8) 720.$$

$$9. 1) 12\frac{2}{3}; 3) 1\frac{7}{9}; 5) 1.$$

$$10. 2) 10; 4) 400; 6) 9,5.$$

$$11. 1) 0,188; 3) 0,35; 5) 7\frac{1}{3}.$$

12. 2) $-0,7$; 4) $-\frac{1}{30}$; 6) $0,7$.

13. 1) $|a| < |b|$; 3) $|a| > |b|$; 5) $|a| > |b|$.

14. d .

15. b .

16. 2) 1 ; 4) $1\frac{1}{2}$; 6) $7\frac{5}{7}$.

17. 1) $0,08$; 3) 1 ; 5) 1 .

18. 2) $\frac{1}{6}$; 4) $\frac{1}{4}$; 6) $2,5$.

19. 1) -100 ; 3) $1,5$; 5) $-\frac{1}{4}$.

20. 2) $-1\frac{2}{9}$; $-\frac{4}{9}$; 4) $-\frac{1}{20}$; $2\frac{9}{20}$; 6) $3,2$; $10,8$;

8) $-\frac{1}{3}$; $-\frac{1}{9}$; $\frac{1}{9}$; $\frac{1}{3}$.

21. 1) а) $\frac{2}{3}$; б) $1\frac{1}{3}$; в) $9\frac{7}{15}$; г) $0,08$.

22. 2) а) 70 ; б) 14 ; в) $1\frac{1}{27}$; г) 1 .

23. 1) а) $0,16$; б) $5,12$; в) $0,192$; г) $\frac{4}{75}$.

24. 2) а) $16\frac{2}{3}$; б) $119\frac{1}{21}$; в) $4\frac{4}{49}$; г) 51 .

25. 1) 92% ; 2) а) 36 кг; б) $43,2$ кг; в) 48 кг.

26. 1) $\approx 244\,000$ км²; 2) $\approx 830\,000$ км².

27. 1) ≈ 1389 млн км³; 2) $\approx 510\,000\,000$ км².

28. 1) 64 кг и 56 кг; 2) 8 кг и 11 кг.

29. 1) $60\,000$ и $20\,000$; 2) $60\,000$ т и $30\,000$ т.

30. 1) На 19% ; 2) на 96% .

31. 1) На 32% ; 2) на 28% .

32. 1) Увеличилось на 100% ; 2) увеличилось на $12,5\%$.

33. 1) 1200 ; 2) 50 .

34. 1) 1750 ; 2) 400 .

35. 1) 240 кг; 2) $13,5$ кг.

36. 1) 40 т; 2) 120 кг.

37. 1) 150 кг; 2) 25 т.

38. 1) Уменьшится на 1% ; 2) уменьшится на 36% .

39. 1) На $37,5\%$; $38\frac{6}{13}\%$; 2) на $17\frac{11}{17}\%$; $54\frac{2}{37}\%$.

40. 1) 190 кг; 2) 7 кг.
41. 1) $1\frac{1}{9}$ кг; 2) 2,7 кг.
42. 1) 24 т; 2) 88 кг.
43. 1) 53 %; 2) 5 %.
44. 1) 5; 2) 435.
45. 1) 10 кг; 2) 1,5 кг.
46. 1) На 23,5 %; 2) на 26,5 %.
47. 1) Уменьшилась на 4,375 %; 2) снизилась на 7,488 %.
48. 1) Снизятся на 1 %; 2) снизятся на 1 %.
49. 1) На $11\frac{1}{9}$ %; 2) на $16\frac{2}{3}$ %.
50. 1) 15 %; 2) 8 л.
51. 1) 56 и 66; 2) 5 % — 40 т, 40 % — 100 т.
52. 1) $3\frac{1}{13}$ ч; 2) $9\frac{9}{19}$ ч.
53. 1) $1\frac{1}{3}$ ч; 2) 0,8 ч.
54. 1) $\frac{13}{48}$; 2) 4 мин.
55. 1) 4 дня; 2) 3 ч.
56. 1) 14 ч; 2) 1,5 ч.
57. 1) 5 мин; 2) 3 дня.
58. 1) 3 ч; 2) 9 дней.
59. 1) 12 ч; 15 ч; 2) 7 ч; 8 ч.
60. 1) 15 ч; 2) 4 ч.
61. 1) 20 ч; 30 ч; 2) 18 ч; 22,5 ч.
62. 1) 2,5 ч; 0,5; 2) 564 км.
63. 1) 40 ч; 2) 120 ч.
64. 1) 30 ч; 2) 10; 15.
65. 1) 4,5 ч; 2) 13 ч 10 мин.
66. 1) На поезде — 600 км, на автомобиле — 480 км, на теплоходе — 140 км; 2) 360 км, 432 км, 1200 км.
67. 1) 96 км; 2) 39 км, 15 км.
68. 1) 9 км; 2) 2 км, 4 км, 12 км.
69. 1) $11\frac{\text{км}}{\text{ч}}$, $12\frac{\text{км}}{\text{ч}}$; 2) $9\frac{\text{км}}{\text{ч}}$, $12\frac{\text{км}}{\text{ч}}$.

70. 1) 2,5 ч; 2) 4 ч 3 мин.
71. 1) $86 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$, $91 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$; 2) 3,5 ч, 43,4 км.
72. 1) 13 ч 20 мин; 2) 7,5 ч.
73. 1) $600 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$; $800 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$; 2) $48 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$, $32 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$.
74. 1) $15 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$; 2) $3 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$.
75. 1) $48 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$; 2) $7,7 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$.
76. 1) $14,4 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$; 2) $19,2 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$.
77. 1) $1 \frac{\text{м}}{\text{с}}$; $4 \frac{\text{м}}{\text{с}}$; 2) $2 \frac{\text{м}}{\text{с}}$; $8 \frac{\text{м}}{\text{с}}$.
78. 1) $5 \frac{\text{м}}{\text{с}}$, $15 \frac{\text{м}}{\text{с}}$; 2) $4 \frac{\text{м}}{\text{с}}$; $6 \frac{\text{м}}{\text{с}}$.
79. 1) 7; 2) 32.
80. 1) 2; 2) 3.
81. 1) 2; 2) 14.
82. 1) 18 м; 2) 165 м.
83. 1) 8; 2) 6.
84. 1) 41 и 13; 2) 11 и 20.
85. 1) 11 и 19; 2) 12 и 18.
86. 1) 141; 2) 888.
87. 1) 173; 2) 98.
88. 1) 106, 15 раз; 2) 200, 30 раз.
89. 1) 134; 2) 235.
90. 1) 25; 2) 170 и 576.
91. 1) 140, 141, 142; 2) 90, 91, 92, 93.
92. 1) 84, 90, 96; 2) 213, 219, 225.
93. 1) 72; 2) 108.
94. 1) 86; 2) 36.
95. 1) 62; 2) 84.
96. 1) 45 и 454; 2) 28.
97. 1) 0,39; 2) 8,4.
98. 1) 74; 2) 74.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Аргумент 78

Вынесение общего множителя за скобки 27, 157

Выражение буквенное 10

— не имеющее смысла 7

— рациональное 228

— с переменной 11

— целое 229

— числовое 5

Выражения тождественно равные 38

График линейной функции 92

— прямой пропорциональности 82

Группировка членов многочлена 163

Двучлен 112

Действие арифметическое 5

Дробь рациональная 185

Закон распределительный 27

Знаменатель общий рациональных дробей 197

Значение выражения при данном значении переменных 11

— числового выражения 6

Квадрат разности 137

— — неполный 151

— суммы 136

— — неполный 151

Корень уравнения 54

Коэффициент 29

— прямой пропорциональности 80

— угловой 83

Куб разности 148

— суммы 147

Многочлен 109

— нулевой 109

— стандартного вида 112

Многочлены противоположные 119

Множители дополнительные дробей 197, 198

Область допустимых значений переменной 13

— определения выражения с переменной 12

— — естественная 13

— — функции 78

Одночлен 99

— нулевой 99

— стандартного вида 100

Переменная зависимая 78

— независимая 78

Преобразование тождественное 42

Приведение дробей к общему знаменателю 197

— дроби к новому знаменателю 191

— подобных слагаемых 30

— подобных членов 111

Равенство верное 18

— — числовое 18

Разложение многочлена на множители 156

Разность квадратов 142

— кубов 152

Раскрытие скобок 27

Сумма кубов 152

Тождество 37

Трехчлен 112

Уравнение линейное 62

— первой степени 62

— с одной переменной 54

Уравнения равносильные 55

Формула 48

Функция 78

— $y = kx$ (прямая пропорциональность) 80

— линейная 89

— постоянная 90

СОДЕРЖАНИЕ

От авторов	3
------------------	---

Глава 1. Тождества

1.1. Числовые выражения	5
1.2. Выражения с переменной	10
1.3. Числовые равенства	19
1.4. Раскрытие скобок. Вынесение общего множителя за скобки. Приведение подобных слагаемых	26
1.5. Тождества	37
1.6. Тождественные преобразования	41
1.7. Формулы	48

Глава 2. Линейные уравнения. Линейная функция

2.1. Уравнения с одной переменной (с одним неизвест- ным)	54
2.2. Линейные уравнения	61
2.3. Решение задач с помощью уравнений	69
2.4. Понятие функции	77
2.5. Функция $y = kx$	80
2.6. Линейная функция	89

Глава 3. Многочлены

3.1. Одночлены	99
3.2. Умножение одночленов. Возведение одночленов в степень	105
3.3. Многочлены	109
3.4. Приведение подобных членов	110
3.5. Сложение и вычитание многочленов	118
3.6. Умножение многочлена на одночлен	122
3.7. Умножение многочлена на многочлен	125
3.8. Деление многочлена на одночлен	130

Глава 4. Формулы сокращенного умножения

4.1. Квадрат суммы и квадрат разности	136
4.2. Разность квадратов	142
▲4.3. Куб суммы и куб разности	147
▲4.4. Сумма кубов и разность кубов	151

Глава 5. Разложение многочленов на множители

5.1. Вынесение общего множителя за скобки	156
5.2. Разложение многочленов на множители способом группировки	163
5.3. Разложение многочленов на множители с помощью формулы разности квадратов	167
5.4. Разложение многочленов на множители с помощью формул квадрата суммы и квадрата разности	171
▲5.5. Разложение многочленов на множители с помощью формул суммы и разности кубов, куба суммы и куба разности	175
▲5.6. Разложение многочленов на множители комбинацией различных способов	180

Глава 6. Рациональные дроби

6.1. Рациональная дробь	185
6.2. Основное свойство дроби	190
6.3. Приведение дробей к общему знаменателю	197
6.4. Сложение и вычитание дробей с одинаковыми знаменателями	202
6.5. Сложение и вычитание дробей с разными знаменателями (знаменатели — одночлены)	205
6.6. Сложение и вычитание дробей с разными знаменателями (знаменатели — произвольные)	210
6.7. Умножение дробей	216
6.8. Деление дробей	222
6.9. Рациональные выражения	228

Приложения	241
----------------------	-----

Материалы для повторения	—
------------------------------------	---

1. Упражнения на повторение арифметического материала курса математики 5—6-х классов	—
2. Задачи на проценты	246
3. Задачи на части	257
4. Задачи на движение	266
▲5. Применение уравнений при решении задач	277
Справочный материал	286
Ответы	290
Предметный указатель	315

Учебное издание

Кузнецова Елена Павловна
Муравьева Галина Леонидовна
Шнеперман Лев Борисович
Ящин Борис Юрьевич

АЛГЕБРА

Учебное пособие для 7 класса
учреждений общего среднего образования
с русским языком обучения

4-е издание, исправленное

Зав. редакцией *В. Г. Бехтина*. Редактор *Н. М. Алганова*. Оформление
Е. Э. Агунович. Художественный редактор *А. А. Волотович*. Техническое
редактирование и компьютерная верстка *И. И. Дубровской*. Корректоры
В. С. Бабеня, О. С. Козицкая, Е. И. Даниленко, Е. П. Тхир, А. В. Алешко.

Подписано в печать 23.01.2014. Формат 60×90¹/₁₆. Бумага офсетная.
Гарнитура школьная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 20 + 0,25 форз.
Уч.-изд. л. 9,48 + 0,12 форз. Тираж 95 000 экз. Заказ .

Издательское республиканское унитарное предприятие
«Народная асвета» Министерства информации Республики Беларусь.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 1/2 от 08.07.2013.
Пр. Победителей, 11, 220004, Минск.

ОАО «Полиграфкомбинат им. Я. Коласа».
ЛП № 02330/0150496 от 11.03.2009.
Ул. Корженевского, 20, 220024, Минск.

Правообладатель Народная асвета

(Название и номер учреждения образования)

Учебный год	Имя и фамилия учащегося	Состоя- ние учебного пособия при по- лучении	Оценка учаще- муся за пользо- вание учебным пособием
20 /			
20 /			
20 /			
20 /			
20 /			